Correction - DS 5

Devoir surveillé du Samedi 30 Novembre

Exercice 1 (EDHEC 2023)

1. On rappelle la définition de la matrice $A = (a_{i,j})$, adaptée à la numérotation des sommets commençant à 0.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i-1 \text{ est lié à } j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela donne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 sont les suivantes :

$$[2,1,0,3], [2,1,2,3], [2,3,0,3], [2,3,2,3], [2,3,4,3]$$

Il y en a donc 5.

(b) Le cours sur les graphes permet d'affirmer que le nombre de chemins de longueur k permettant d'aller du sommet i à un sommet j se trouve dans l'élément $a_{i,j}$ de A^k. Donc le programme Python complet demandé :

```python
def f(M,k):
    N = al.matrix_power(M,k)
    return N

A = np.array([[0, 1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1, 0],  [1, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0]])
B = f(A, 3)
n = B[2, 3]
print(n)
```

3. (a) Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Donc

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Laissée au lecteur.

(c) L est diagonalisable car symétrique.

4. (a) $LX = \begin{pmatrix} 2a-b-d \\ -a+2b-c \\ -b+2c-d \\ -a-c+3d-e \\ -d+e \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} {}^tXLX &= a(2a-b-d)+b(-a+2b-c)+c(-b+2c-d) \\ &\quad +d(-a-c+3d-e)+e(-d+e) \\ &= 2a^2+2b^2+2c^2+3d^2+e^2-2ab-2ad-2bc-2cd-2de \end{aligned}$$

Posons $r = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$.

$$\begin{aligned} r &= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 + d^2 - 2ad + a^2 + e^2 - 2ed + d^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de \end{aligned}$$

On a bien l'égalité : ${}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$

(b) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ. On a :

$$LX = \lambda X$$

puis

$${}^tXLX = \lambda {}^tXX = \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

D'après la question précédente, ${}^tXLX$ est un réel positif (somme de carrés). Donc nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

(c) LU est la matrice colonne formée sur chaque ligne i par la somme des éléments de la ligne i de L.
Donc $LU = 0 = 0 \times U$ et $U \neq 0$. Donc U est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$.

5. (a) Par double implication :
   - $\Rightarrow$ Si $LX = 0$, alors ${}^tXLX = 0$. À la question 3.(b), on a montré que ${}^tXLX$ est la somme de 5 carrés.
     Chacun des carrés doit donc être nul donc $a = b = c = d = e$ donc $X = aU$ et $X \in \text{Vect}(U)$.
   - $\Leftarrow$ Si $X \in \text{Vect}(U)$, alors il existe un réel μ tel que $X = \mu U$. Alors $LX = \mu LU = 0$ avec la question 4.(c).

   On a bien montré l'équivalence :

$$LX = 0 \Longleftrightarrow X \in \text{Vect}(U)$$

(b) La question 5.(a) permet d'affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\text{Vect}(U)$. Donc $\dim(E_0(L)) = \dim(\text{Vect}(U)) = 1$.
Si un autre des λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 était nuls, on aurait un deuxième vecteur propre dans la base propre qui serait associé à la valeur propre 0, et on aurait $\dim(E_0(L)) \geq 2$, ce qui n'est pas vrai.
Donc $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Exercice 2 (EDHEC 2004)

1. (a) Le premier pile advient au plus tôt au premier tirage et au plus tard au n-ième lancer. Enfin, si l'on n'a pas de pile, $Z = 0$. Donc les valeurs possibles de Z sont : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   (b) Si $k \neq 0$ (donc si $1 \leq k \leq n$), alors $(Z = k)$ signifie que l'on a le premier pile lors du k-ième lancer.
   Donc $(Z = k) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$.
   Les lancers étant indépendants, $P(Z = k) = P(F_1)\ P(F_2) \ldots P(F_{k-1})\ P(P_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   Si $k = 0$, alors $Z = 0$ signifie que l'on a pas eu de pile lors de ces n lancers.
   Donc $(Z = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$.
   Comme les lances sont indépendants, $P(Z = 0) = P(F_1) \ldots P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) On calcule $\sum_{k=0}^{n} P(Z=k)$ en mettant à part la valeur $k=0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(Z=k) &= P(Z=0)+\sum_{k=1}^{n} P(Z=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1.\end{aligned}$$

(d) Dans le programme, `k` est le compteur de lancers. On effectue des lancers jusqu'à ce que l'on ait pile `rd.random() < 1/2` ou que l'on ait effectué n lancers `(k <= n)`.
Si on n'obtient pas de pile, $k=n+1$ à la fin de la boucle et z vaut 0 (`z = 0`). Si on obtient un pile, la boucle s'arrête et $k<n+1$ donc `z` est affecté du nombre k de lancers effectués (`z = k`).

```python
def simulZ(n):
    k = 1
    while k <= n and rd.random()<1/2 :
        k = k+1
    if k == n+1 :
        z = 0
    else:
        z = k
    return(z)
```

2. Si $Z=0$, on a alors $X=0$.
Si $Z=n$, on fait n tirages dans l'urne qui ne contient que des blanches et $X=n$.
Si $Z=k\in [\![1,n-1]\!]$, on peut obtenir entre 0 et k boules blanches.
Donc les valeurs possibles de X sont $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

3. (a) Quand $(Z=0)$, on a $(X=0)$ donc $P_{(Z=0)}(X=0)=1$ et $P_{(Z=0)}(X=i)=0$ si $1\le i\le n$.
(b) Quand $(Z=n)$, on effectue n tirages dans l'urne n qui contient n boules blanches et 0 boules noires. On obtiendra donc n boules blanches.
Donc $P_{(Z=n)}(X=n)=1$ et $P_{(Z=n)}(X=i)=0$ si $0\le i\le n-1$.
(c) Quand $(Z=k)$ $(1\le k\le n-1)$, on effectue k tirages indépendants dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ noires. Les boules étant équiprobables, la probabilité d'obtenir une blanche est de k/n à chaque tirage.
Donc le nombre de boules blanche obtenues suit une loi binomiale $\mathcal{B}(k,k/n)$ et on a :

$$P_{(Z=k)}(X=i)=\begin{cases}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0\le i\le k,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4. (a) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Z=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}P(X=0) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n}(Z=k)\cap(X=0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P((Z=k)\cap(X=0)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=0) \quad \text{(probas composées)}\end{aligned}$$

Comme on a des formules particulières pour $k=0$ et $k=n$, on les traite à part :

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(Z=0)\,P_{(Z=0)}(X=0)+P(Z=n)\,P_{(Z=n)}(X=0)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=0)\\
&= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+0\cdot P(Z=n)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{k}{0}\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot1\cdot\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k
\end{aligned}$$

(b) Pour $(X=n)$, on ne peut obtenir n boules blanches qu'en faisant n tirages, donc si $(Z=n)$. Réciproquement, si $(Z=n)$, on a nécessairement $(X=n)$ car dans l'urne n, il n'y a que des boules blanches.
Donc $(X=n)=(Z=n)$ et on a :

$$P(X=n)=P(Z=n)=\frac{1}{2^n}$$

(c) Pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, on réutilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Z=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$:

$$P(X=i)=\sum_{k=0}^{n}P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=i)$$

avec, là encore, les valeurs $k=0$ et n à traiter à part et $P_{(Z=k)}(X=i)$ est soit nulle soit donnée par la loi binomiale, donc avec deux formules différentes pour $k\geq i$ et $k<i$ (à exprimer par rapport à k, car c'est lui l'indice de sommation). D'où le découpage de la somme :

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= P(Z=0)\,P_{(Z=0)}(X=i)+P(Z=n)\,P_{(Z=n)}(X=i)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{i-1}P(Z=k)P_{(Z=k)}(X=i)+\sum_{k=i}^{n-1}P(Z=k)P_{(Z=k)}(X=i)\\
&= 0+0+\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot P(Z=k)+\sum_{k=i}^{n-1}P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=i)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}$$

5. On calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}P(X=i)$ en traitant à part $i=0$ et $i=n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}P(X=i) &= P(X=0)+P(X=n)+\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i)\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\frac{1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

La somme double $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}$ porte sur les i et k tels que$1 \leq i \leq k \leq n-1$ que l'on réordonne : $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq i \leq k$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ (on reconnaît le binôme)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)^k-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{h=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k
\end{aligned}$$

D'où le total :

$$\sum_{i=0}^{n}P\left(X=i\right)=\frac{2}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k=1.$$

Exercice 3 (EML 2024)

1. (a) Limite en $+\infty$: par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{kx}=+\infty$.

   Limite en $-\infty$: on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{kx}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^{kx}=0$ par croissance comparée, d'où

   $$\lim_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{kx}+e^{kx}=0.$$

   (b) La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et

   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_k'(x)=e^{kx}+(x+1)ke^{kx}=(kx+k+1)e^{kx}.$$

   Comme $e^{kx}>0$ sur $\mathbb{R}$, il vient :

   $$\begin{aligned}
   f_k'(x)\geq 0 &\iff kx+k+1\geq 0\\
   &\iff kx\geq -k-1\\
   &\iff x\geq -1-\frac{1}{k}.
   \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$					
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) \geq f_k(x) &\iff (x+1)e^{(k+1)x} \geq (x+1)e^{kx} \\ &\iff (x+1)e^{kx}e^{x} \geq (x+1)e^{kx} \\ &\iff (x+1)e^{x} \geq x+1 \quad \text{(en simplifiant par } e^{kx} > 0) \\ &\iff (x+1)(e^x-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Or nous avons

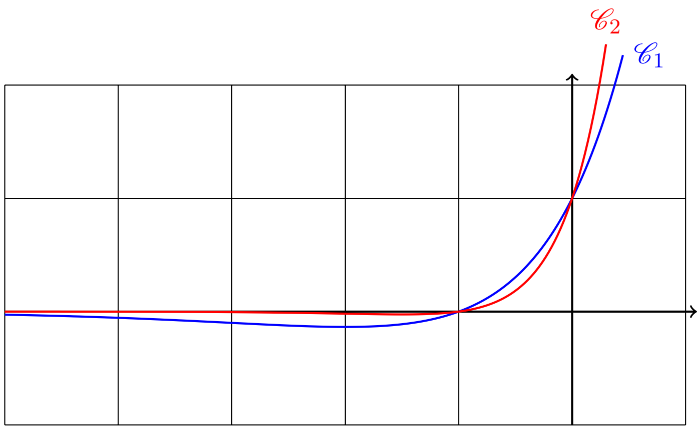
$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathscr{C}_{k+1}$ se situe au–dessus de $\mathscr{C}_k$ sur les abscisses $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$, et en–dessous de $\mathscr{C}_k$ sur les abscisses $[-1,0]$. Les courbes $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ s'intersectent aux points de coordonnées $(-1,0)$ et $(0,0)$.

(b) Voici le graphique demandé :



3. (a) La fonction f_k prenant des valeurs négatives sur $]\infty,-1]$, l'équation $f_k(x) = k$ n'a pas de solution dans cet intervalle. La fonction f_k est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $f_k([-1,+\infty[) = [0,+\infty[$. Comme $k \in [0,+\infty[$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution u_k dans $[0,+\infty[$.

(b) On remarque que $f_1(0) = 1$. Par unicité de la solution à l'équation $f_1(x) = 1$, on a $u_1 = 0$.

4. Soit $k \geq 1$. On trouve $f_k(0) = 1$ et $f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = \ln(k) + k$. Ainsi

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq k + \underbrace{\ln(k)}_{\geq 0} &\iff f_k(0) \leq f_k(u_k) \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) \\ &\iff 0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{(car } f_k \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Notons que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissance comparée. À l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_k) converge vers 0.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f_k(u_k) = k &\iff (u_k+1)e^{ku_k} = k \\ &\iff \ln(u_k+1) + \ln(e^{ku_k}) = \ln(k) \\ &\iff ku_k = \ln(k) - \ln(u_k+1) \\ &\iff u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}. \end{aligned}$$

(b) D'après l'égalité précédente,

$$u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1 - \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}.$$

Or, sachant que (u_k) converge vers 0,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1$, c'est-à-dire $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque $k \to +\infty$.

6. La série de Riemann $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ est divergente, or $\frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ pour tout $k \geq 3$, donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

On sait que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$, les séries $\sum u_k$ et $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ sont donc de même nature selon le critère de comparaison des séries à termes positifs. Ainsi la série $\sum\limits_{k\geq 1} u_k$ diverge.

Exercice 4 (EDHEC 2024)

1. (a) La variable X_0 correspond au nombre de boules blanches présentes dans A initialement. D'après l'énoncé, on a $X_0 = 1$ et donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

(b) Comme il peut y avoir 0,1 ou 2 boules blanches, on a $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

- On a $X_1 = 0$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule blanche dans l'urne A et une boule noire dans l'urne B. Chaque tirage étant indépendant, on a :

$$a_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- On a $X_1 = 2$ si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule noire dans l'urne A et une boule blanche dans l'urne B. Chaque tirage étant indépendant, on a :

$$a_2 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- Comme $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $((X_1 = 0), (X_1 = 1), (X_1 = 2))$, est un système complet d'évènement et on a donc :

$$a_1 = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise les même arguments que précédemment : il y a dans l'urne 0,1 ou 2 boules blanches donc on a $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Ainsi, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est donc un système complet d'évènement.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'évènement, on a :

$$a_n + b_n + c_n = P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'évènement $(X_n = 0)$ soit réalisé. Dans ce cas l'urne A contient deux boules noires et l'urne B contient forcément deux boules blanches. Le tirage va donc forcément aboutir à ce que chaque urne contienne une boule noire et une boule blanche. On a donc :

- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$.
- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

Supposons maintenant que l'évènement $(X_n = 1)$ soit réalisé. On est alors dans la même situation qu'avant le premier tirage. On a donc :

- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$.
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$.
- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{4}$.

Supposons maintenant que l'évènement $(X_n = 2)$ soit réalisé. On est alors dans une situation symétrique à celle où $(X_n = 0)$, où les rôles des boules noires et des boules blanches sont inversées. On a alors :

- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1$.
- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$.

Ces probabilités correspondent bien aux poids des arêtes du graphe donné dans l'énoncé.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$M = \left(P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)_{(i,j)\in [\![0,2]\!]^2)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somme des éléments de chaque ligne de la matrice est bien égal à 1 (on dit que la matrice M est stochastique).

(c) D'après la question 1.(c), $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'évènement. On peut alors utiliser la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) \\ &\quad +P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) \\ &= \frac{b_n}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \\ &\quad +P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) \\ &= a_n + \frac{b_n}{2} + c_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(X_{n+1} = 2) \\ &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) \\ &\quad +P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) \\ &= \frac{b_n}{4}. \end{aligned}$$

3. Rappelons qu'on a $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$ et $(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Vérifions les relations de la question précédente :
   - $\dfrac{b_0}{4} = \dfrac{1}{4} = a_1 = c_1$,
   - $a_0 + \dfrac{b_0}{2} + c_0 = \dfrac{1}{2} = b_1$.

   Les relations de la question précédente sont donc bien vérifiées.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que X_{n+1} étant une variable aléatoire finie, l'espérance est bien définie. On a :
$$E(X_{n+1}) = 0 \times P(X_{n+1} = 0) + 1 \times P(X_{n+1} = 1) + 2 \times P(X_{n+1} = 2) = b_{n+1} + 2c_{n+1}.$$
   (b) Remarquons que d'après la question 2.(c), on a $a_{n+1} = c_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1} = 1.$$
   (c) Si $n \in \mathbb{N}^*$, cette relation se déduit immédiatement des deux questions précédentes par changement d'indice. Si $n = 0$, on a $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons d'abord que :
$$U_nV = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a_n - b_n + 2c_n$$
   On a alors :
$$\begin{aligned} U_{n+1}V &= 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = 2\frac{b_n}{4} - a_n - \frac{b_n}{2} - c_n + 2\frac{b_n}{4} = -a_n + \frac{b_n}{2} - c_n \\ &= \frac{-1}{2}(2a_n - b_n + c_n) = \frac{-1}{2}U_nV. \end{aligned}$$
   La suite $(U_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a $2a_n - b_n + 2c_n = U_nV$. Or, on a montré que $(U_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et de premier terme $U_0V = -1$. On en déduit que :
$$2a_n - b_n + 2c_n = U_nV = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après les questions 1.(a) et 2.(c) que $a_n = c_n$ pour tout entier n. D'après la question 4.(c), on a $b_n = 1 - 2c_n = 1 - 2a_n$. D'après la question 5.(b), on a alors :
$$-\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 2a_n - b_n + 2c_n = 2a_n - (1 - 2a_n) + 2a_n = 6a_n - 1$$
   On en déduit que $a_n = c_n = \dfrac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{6}$.

   On déduit ensuite que $b_n = 1 - 2a_n = 1 - \dfrac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 1}{3} = \dfrac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2}{3}$.

   Les valeurs de a_n, b_n et c_n nous permettent de déduire directement la loi de X_n.

7. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit d'étudier les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors :

   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 1}{6} = \dfrac{1}{6}.$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

   On en déduit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :
$$(P(X=0), P(X=1), P(X=2)) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

8. (a) On a
$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ \frac18 & \frac34 & \frac18 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ \frac18 & \frac34 & \frac18 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac18 & \frac34 & \frac18 \\ \frac{3}{16} & \frac58 & \frac{3}{16} \\ \frac18 & \frac34 & \frac18 \end{pmatrix}.$$
   On vérifie alors l'égalité de l'énoncé :
$$M^2 + M = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ \frac18 & \frac34 & \frac18 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac32 & \frac14 \\ \frac38 & \frac54 & \frac38 \\ \frac14 & \frac32 & \frac14 \end{pmatrix} = 2M^3.$$

   (b) On déduit de la question précédente que le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - X$ est annulateur de M.
   Déterminons les racines de P. On a $P(X) = X(2X^2 - X - 1)$ donc il suffit de déterminer les racines de $2X^2 - X - 1$. Le discriminant de $2X^2 - X - 1$ est donné par $\Delta = 9$ et les racines sont données par $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. On a trouvé les valeurs propres possibles et donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{-\frac12, 0, 1\right\}$. On détermine directement les sous-espaces propres (s'ils sont différents de 0, c'est que les valeurs associées sont bien des valeurs propres).

   - Pour $E_{-1/2}$:
     Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\frac12}$. Le triplet (x, y, z) est alors solution du système
$$\begin{cases} \frac{x}{2} & +y & & = 0 \\ \frac{x}{4} & +y & +\frac{z}{4} & = 0 \\ & y & +\frac{z}{2} & = 0 \end{cases}$$
     On laisse au lecteur le soin de vérifier que les solutions de ce système sont de la forme $(-2y, y, -2y)$ où $y \in \mathbb{R}$. Ainsi, $E_{-\frac12} \neq \{0\}$ donc $-\dfrac{1}{2}$ est une valeur propre et une base de $E_{-\frac12}$ est donc donné par $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ (famille génératrice et libre car un vecteur non nul).
   - Pour E_0 :
     De la même façon, on montre que 0 est valeur propre et on obtient une base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ de E_0.

- Pour E_1 :

  De la même façon, on montre que 0 est valeur propre et on obtient une base $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ de E_1.

9. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P. D'après la question précédente, ces vecteurs sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes et forment alors une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par concaténation. On en conclut que $\mathrm{rg}(P) = 3$ et que la matrice P est donc inversible.

10. On a d'une part
$$MP = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Et d'autre part
$$PD = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
On a donc bien $MP = PD$. Comme P est inversible, cela implique que $M = PDP^{-1}$ et donc que M est diagonalisable.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$U_nM = \begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{b_n}{4} & a_n + \frac{b_n}{2} + c_n & \frac{a_n}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

12. Montrons cette égalité par récurrence.

    Init. Pour $n = 0$, on a $U_0M^0 = U_0I_3 = U_0$. L'égalité est bien vérifiée.

    Héré. Soit n un entier. Supposons que $U_n = U_0M^n$. Alors, en utilisant la question précédente, on a :
$$U_{n+1} = U_nM = U_0M^nM = U_0M^{n+1}.$$

    Ccl. Par le principe de récurrence, on a donc bien que pour tout entier n, $U_n = U_0M^n$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de a_n, b_n et c_n, la loi de X_n est donnée par les coefficients de U_n, Il suffit donc de calculer $U_0.M^n$.

    - Remarquons que comme $U_0 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, il suffit de calculer la seconde ligne de M^n.
    - Ensuite, en utilisant la question 8.(d), on peut démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$.
    - Enfin, après avoir déterminé P^{-1} par l'algorithme du pivot de Gauss, on peut trouver par le calcul la seconde ligne de M^n.
