Correction - DS 7 - Sujet A

Devoir surveillé du Samedi 20 Janvier

Exercice 1 (ECRICOME 2016)

1. (a) On a :

$$E = \{M(x,y), x, y \in \mathbb{R}\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(A, B).$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) On montré à la question précédente que la famille (A, B) est génératrice de E. Elle est libre car A et B sont non colinéaires. C'est donc une base de E et E est de dimension 2.

2. (a) • Pour $E_1(A)$:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +2z & = 0 \\ -x & +3y & -2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ z = 2y \end{array}\right.$$

Comme $E_1(A) \neq \{0\}$, 1 est bien valeur propre de A. De plus,

$$E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = Vect(X_1)$$

avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c'est une base de $E_1(A)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice).

• Pour $E_2(A)$:

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +2z & = 0 \\ -x & +2y & -2z & = 0 \\ & 4y & -3z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +2z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & 4y & -3z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{2}{3}y \\ z = \frac{4}{3}y \end{array}\right.$$

Comme $E_2(A) \neq \{0\}$, 2 est bien valeur propre de A. De plus,

$$E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \\ \frac{4}{3}y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = Vect(X_2)$$

avec $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c'est une base de $E_2(A)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice).

- Pour $E_3(A)$:

$$(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} & -2y & +2z & =0\\ -x & +y & -2z & =0\\ & 4y & -4z & =0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y\\ z=y\end{array}\right.$$

Comme $E_3(A)\neq\{0\}$, 3 est bien valeur propre de A. De plus,

$$E_3(A)=\left\{\begin{pmatrix}-y\\y\\y\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\}=Vect(X_3)$$

avec $X_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ (c'est une base de $E_3(A)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice).

(b) X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres associés à 3 valeurs propres distinctes. Donc (X_1,X_2,X_3) est une famille libre (par concaténation de familles libres) de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable.

(c) En posant

$$P=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix} \text{ et } D_A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

on a alors $A=PD_AP^{-1}$.

(d) Utilisons la méthode du pivot pour déterminer P^{-1}.

$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_2\leftarrow L_2+L_1$ et $L_2\leftarrow L_3+2L_1$

$\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_1\leftarrow L_1-L_3$

$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_1\leftarrow L_1+2L_2$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_1\leftarrow L_1+2L_2$

On peut donc conclure que P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

3. (a) On a $BX_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $BX_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}=-X_2$ et $BX_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-X_3$.

Comme X_1, X_2 et X_3 sont non nuls, ils sont donc vecteurs propres de B associés respectivement aux valeurs propres 0, -1 et -1.

(b) On a vu que (X_1,X_2,X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc B est diagonalisable et on a :

$$B=PD_BP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

4. (a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$M(x,y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} = PD(x,y)P^{-1}$$
où $D(x,y) = xD_A + yD_B$.

(b) Comme $M(x,y)$ et $D(x,y)$ sont semblables, $M(x,y)$ est inversible si et seulement si $D(x,y)$ est inversible. En effet :

$\Leftarrow$ Si $D(x,y)$ est inversible, alors $M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

$\Rightarrow$ Si $M(x,y)$ est inversible, alors $D(x,y) = P^{-1}M(x,y)P$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Or, comme $D(x,y)$ est diagonale,
$$D(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix} \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x-y \neq 0 \\ 3x-y \neq 0 \end{cases}$$
Donc $M(x,y)$ est inversible si et seulement si $x \neq 0$, $2x-y \neq 0$ et $3x-y \neq 0$.

5. On a $B^2 = PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_B^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = -PD_BP^{-1} = -B \in E$.

De même, on a :
$$A^2 = PD_AP^{-1}PD_AP^{-1} = PD_A^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Alors :
$$\begin{aligned}
A^2 \in E \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ A^2 = xA + yB \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = xD_A + yD_B \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 \\ 2x-y = 4 \\ 3x-y = 9 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \qquad \to \text{Impossible !}
\end{aligned}$$

Donc $A^2 \notin E$.

Exercice 2 (ECRICOME 2004)

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus :
$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x).$$
Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

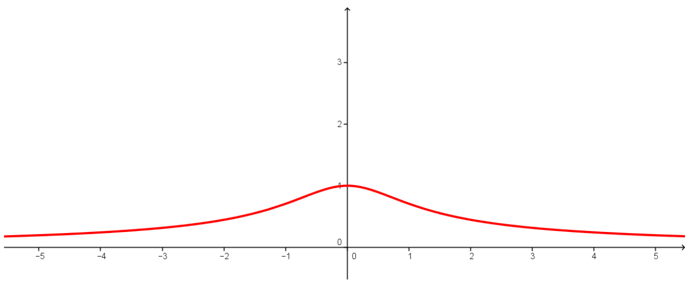
2. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (2x) \times (1+x^2)^{3/2} = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	

3. Comme $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. D'après les deux questions précédentes, f est minorée par 0 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, f est également minorée par 0 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}^-$.
Donc f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

5. Il faut tracer les asymptotes $(y=0)$ en $\pm\infty$ et la tangente horizontale en 0.
Il faut respecter le sens de variation sur $\mathbb{R}_+$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe (Oy).
On obtient la courbe suivante :



6. Comme f est continue et strictement décroissantes sur $[0,+\infty[$, elle est bijective de $[0,+\infty[$ dans $\left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] =]0,1] = J$ d'après le théorème de la bijection.

7. Soit $y \in]0,1]$. On cherche $x \in [0,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Alors :
$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y>0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{car } x \geq 0 \text{ et } y>0. \end{aligned}$$
Donc l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}^+$ est $x = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

8. Comme f est bijective de $[0,+\infty[$ dans $]0,1]$, elle admet une bijection réciproque définie par :
$$f^{-1}:\left\{\begin{array}{rcl}]0,1] & \rightarrow & [0,+\infty[\\ y & \mapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{array}\right.$$
Pour tout $y\in\,]0,1]$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on a $f(x)=y\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc :
$$f^{-1}:\left\{\begin{array}{rcl}]0,1] & \rightarrow & [0,+\infty[\\ y & \mapsto & \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{array}\right.$$

9. Raisonnons par construction.
Soit $x\in\mathbb{R}$. $x^2+1>x^2$ donc, comme $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$. Or $|x|=x\geq -x$ si $x\geq 0$ et $|x|=-x\geq -x$ si $x\leq 0$. Donc $\sqrt{x^2+1}>-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0$.
Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}+x>0$ et F est définie sur $\mathbb{R}$.

10. F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continue et dérivables et
$$F'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=f(x).$$
Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$

11. F est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} F(-x) &= \ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=F(x). \end{aligned}$$
F est bien impaire sur son ensemble de définition.

12. Comme $x+\sqrt{1+x^2}\underset{x\to+\infty}{\rightarrow}+\infty$, $F(x)\underset{x\to+\infty}{\rightarrow}+\infty$ par composition avec ln.
Comme F est impaire, $F(x)\underset{x\to-\infty}{\rightarrow}-\infty$.

13. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et que F est une primitive de f, on a :
$$\mathcal{A}(\lambda)=[F(x)]_{x=\lambda}^{2\lambda}=F(2\lambda)-F(\lambda)=\ln\left(2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}\right)-\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right).$$
On cherche la limite de cette quantité en $+\infty$ (c'est une forme indéterminée). On a pour tout $\lambda>0$:
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \ln\left(2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}\right)-\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right) \\ &= \ln\left(2\lambda\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2\lambda^2}}\right)\right)-\ln\left(\lambda\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right)\right) \\ &= \ln(2)+\ln(\lambda)+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2\lambda^2}}\right)-\ln(\lambda)-\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &= \ln(2)+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2\lambda^2}}\right)-\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &\underset{\lambda\to+\infty}{\rightarrow} \ln(2). \end{aligned}$$
Finalement, $\mathcal{A}(\lambda)\underset{\lambda\to+\infty}{\rightarrow}\ln(2)$.

14. Pour u_0 (avec la question 10) :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\, dx = [F(x)]_{x=0}^1 = F(1) - F(0) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Pour u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

15. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto 2\sqrt{1+x^2}$ étant de classe C^1 sur $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} u_3 &= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{1/2} dx \\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

16. On raisonne par construction. Si $x \in [0,1]$, alors :

$$x^n \geq x^{n+1} \Rightarrow x^n f(x) \geq x^{n+1} f(x) \quad \text{car } f(x) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

En intégrant cette inégalité pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_0^1 x^n f(x)\, dx \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

17. La suite (u_n) est décroissante (question 16).

Montrons qu'elle est minorée par 0 toujours par construction. Si $x \in [0,1]$, alors :

$$0 \leq x^n \Rightarrow 0 \leq x^n f(x) \quad \text{car } f(x) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

En intégrant cette inégalité pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$0 \leq \int_0^1 x^n f(x)\, dx \quad \text{et donc} \quad 0 \leq u_n.$$

Comme (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$ par le théorème des suites monotones.

18. On a vu que f était comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$ (question 4).

Donc $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. Comme $x^n \geq 0$ sur $[0,1]$ alors $0 \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.

En intégrant cette inégalité pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$\int_0^1 0\, dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

19. Comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors, par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Exercice 3 (ECRICOME 2004)

1. Notons A l'évènement "le serveur A est choisi", B l'évènement "le serveur B est choisi", T l'évènement "il y a une erreur de transmission".

   L'énoncé indique que $P(A) = \dfrac{7}{10}$, $P(B) = \dfrac{3}{10}$, $P_A(T) = \dfrac{1}{10}$ (le serveur A étant choisi, on a 1 chance sur 10 pour qu'il y ait une erreur de transmission) et $P_B(T) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.

   (a) Soit on a choisi le serveur A, soit on a choisi le serveur B. La famille (A, B) étant un système complet d'évènements, on a : $T = (A \cap T) \cup (B \cap T)$. Alors :
$$\begin{aligned} P(T) &= P((A\cap T)\cup(B\cap T)) = P(A\cap T) + P(B\cap T) \\ &= P(A)P_A(T) + P(B)P_B(T) = \frac{7}{10}.\frac{1}{10} + \frac{3}{10}.\frac{1}{20} = \frac{1}{200}(14+3) = \frac{17}{200}, \end{aligned}$$
   en utilisant le fait qu'on a une union d'événements incompatibles à la deuxième égalité et la formule des probabilités totales à la troisième.

   (b) Ce qui est réalisé est l'erreur de transmission, ce que l'on souhaite savoir est que le serveur A soit choisi. On nous demande donc de calculer $P_T(A)$. Avec la formule de Bayes et la question précédente, on a :
$$P_T(A) = \frac{P_A(T)P(A)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{10}.\frac{7}{10}}{\frac{17}{200}} = \frac{7}{100}.\frac{200}{17} = \frac{14}{17}.$$

2. (a) L'évènement $(L_1 = k)$ signifie que l'on a utilisé durant les k premiers jours le même serveur, soit toujours le A, soit toujours le B, et le $(k+1)^{ième}$ jour on a utilisé l'autre serveur. Ainsi, on a :
$$(L_1 = k) = (\underbrace{A...A}_{k \text{ fois}})B \cup (\underbrace{B...B}_{k \text{ fois}})A.$$
   Les évènements $A...AB$ et $B...BA$ sont incompatibles, donc :
$$P(L_1 = k) = P(A...AB) + P(B..BA).$$
   Les choix des serveurs étant supposés indépendants, on a :
$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P(A)...P(A)P(B) + P(B)..P(B)P(A) \\ &= (P(A))^k P(B) + (P(B))^k P(A) = \left(\frac{7}{10}\right)^k (0.3) + (0.3)^k \left(\frac{7}{10}\right). \end{aligned}$$

   (b) On a, sous réserve de convergence :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^k \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{10}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^k + \frac{7}{10}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^k \\ &= \frac{3}{10}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^{j+1} + \frac{7}{10}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{j+1} = \frac{21}{100}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^{j} + \frac{21}{100}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{j} \end{aligned}$$
   On obtient deux séries géométriques de raisons $\dfrac{7}{10}$ et $\dfrac{3}{10} \in]-1, 1[$, donc convergentes. Par somme, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k)$ converge et on a :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = \frac{21}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{7}{10}} + \frac{1}{1-\frac{3}{10}}\right) = \frac{21}{100}\left(\frac{1}{\frac{3}{10}} + \frac{1}{\frac{7}{10}}\right) = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$$

(c) Montrons que L_1 admet une espérance. La série $\sum_{k\geq 1} kP(L_1 = k)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} kP(L_1 = k) &= \frac{3}{10}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{7}{10}\right)^k + \frac{7}{10}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{3}{10}\right)^k \\ &= \frac{21}{100}\left(\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \sum_{k\geq 1} k\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}\right)\end{aligned}$$

Puisque $\frac{3}{10}, \frac{7}{10} \in]-1,1[$, les séries $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$ sont convergentes (séries géométriques dérivées d'ordre 1). Donc, par somme, la série $\sum_{k\geq 1} kP(L_1 = k)$ est convergente. Donc L_1 admet une espérance et elle est donnée par :

$$E(L_1) = \frac{\frac{21}{100}}{(1-(\frac{7}{10}))^2} + \frac{\frac{21}{100}}{(1-(\frac{3}{10}))^2} = \frac{(\frac{21}{100})}{(\frac{3}{10})^2} + \frac{(\frac{21}{100})}{(\frac{7}{10})^2} = \frac{(\frac{7}{10})}{(\frac{3}{10})} + \frac{(\frac{3}{10})}{(\frac{7}{10})} = \frac{7}{3} + \frac{3}{7} = \frac{58}{21}.$$

(d) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(L_1 = i \cap L_2 = j)$ signifie que l'on a choisi soit A durant les i premiers jours puis B durant les j jours suivants et A le $(i+j+1)^{ième}$ jour, soit B durant les i premiers jours puis A durant les j jours suivants et B le $(i+j+1)^{ième}$ jour. On en déduit que :

$$(L_1 = i \cap L_2 = j) = (\underbrace{A...A}_{i \text{ fois}}\underbrace{B...B}_{j \text{ fois}}A) \cup (\underbrace{B...B}_{i \text{ fois}}\underbrace{A...A}_{j \text{ fois}}B).$$

En particulier, on a choisi $(i+1)$ fois le serveur A et j fois le serveur B dans le premier cas et $(i+1)$ fois le serveur B et j fois le serveur B dans le deuxième cas. Les évènements $(A..AB...BA)$ et $(B...BA...AB)$ étant incompatibles et les choix des serveurs indépendants, on obtient, pour tous les entiers i, j non nuls,

$$\begin{aligned}P(L_1 = i \cap L_2 = j) &= P(A..AB...BA) + P(B...BA...AB) \\ &= (P(A))^{i+1}(P(B))^j + (P(B))^{i+1}(P(A))^j \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^{i+1}\left(\frac{3}{10}\right)^j + \left(\frac{3}{10}\right)^{i+1}\left(\frac{7}{10}\right)^j.\end{aligned}$$

(e) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Comme $(L_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (car $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$), on a, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$(L_2 = j) = \bigcup_{i=1}^{+\infty}(L_1 = i \cap L_2 = j),$$

et c'est l'union d'événements incompatibles. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}P(L_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(L_1 = i \cap L_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left((\frac{7}{10})^{i+1}(\frac{3}{10})^j + (\frac{3}{10})^{i+1}(\frac{7}{10})^j\right) \\ &= (\frac{3}{10})^j\sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{7}{10})^{i+1} + (\frac{7}{10})^j\sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{3}{10})^{i+1} \\ &= (\frac{3}{10})^j\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{7}{10})^{k+2} + (\frac{7}{10})^j\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{10})^{k+2} \\ &= (\frac{3}{10})^j(\frac{7}{10})^2\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{7}{10})^k + (\frac{7}{10})^j(\frac{3}{10})^2\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{10})^k\end{aligned}$$

On obtient deux séries géométriques de raisons $\frac{7}{10}$ et $\frac{3}{10}\in]-1,1[$ donc convergentes. Par somme, $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(L_1=i\cap L_2=j)$ converge et on a :

$$P(L_2=j)=\frac{(\frac{3}{10})^j(\frac{7}{10})^2}{1-(\frac{7}{10})}+\frac{(\frac{7}{10})^j(\frac{3}{10})^2}{1-(\frac{3}{10})}=(\frac{3}{10})^{j-1}(\frac{7}{10})^2+(\frac{7}{10})^{j-1}(\frac{3}{10})^2.$$

3. (a) N_n est le nombre de choix du serveur A en b choix indépendants qui ont tous la même probabilité 0.7. Donc $N_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,0.7)$ et $E(N_n)=\frac{7n}{10}$ et $V(N_n)=\frac{21n}{100}$.

   (b) T_1 est le rang du premier choix de A dans une suite de choix indépendants qui ont tous la même probabilité 0.7. Donc $T_1\hookrightarrow\mathcal{G}(0.7)$ et $E(T_1)=\frac{1}{0.7}=\frac{10}{7}$ et $V(T_1)=\frac{0.3}{0.49}=\frac{30}{49}$.

   (c) Pour $k\geq 2$, $(T_2=k)$ signifie qu'on a eu A au k-ième jour et que c'était le second. Donc qu'il n'y en avait eu qu'un seul avant.
   Donc $(T_2=k)=(N_{k-1}=1)\cap A_k$ et ces événements sont indépendants (lemme des coalitions). Donc, pour tout $k\geq 2$,

$$P(T_2=k)=P(N_{k-1}=1)P(A_k)=\binom{k-1}{1}0.7^1 0.3^{k-1-1}\times 0.7=(k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}.$$

4. (a) On vérifie que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 :
   - Sur $]-\infty,0[$, $F_Z(t)=0$ qui est $\mathscr{C}^1$.
   - Sur $]0,+\infty[$, $F_Z(t)=1-e^{-t}$ qui est $\mathscr{C}^1$.
   - En 0, $\lim\limits_{t\to 0^-}F_Z(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}F_Z(t)=F_Z(0)=0$.

   Donc Z est bien à densité. En dérivant F_Z sur $\mathbb{R}^*$ et en posant $f_Z(0)=1$, on a :

$$f_Z(t)=\begin{cases} e^{-t} & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$$

   (b) On cherche ici l'espérance de Z.
   Elle admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t)dt$ converge (absolument). Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\int_0^{+\infty}te^{-t}dt.$$

   Soit $A\geq 0$. En réalisant deux intégrations par parties, les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto e^{-t}$ étant $\mathscr{C}^2$, on a :

$$\int_0^A te^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^A-\left[e^{-t}\right]_0^A+\int_0^A 0dt=-Ae^{-A}-e^{-A}+1\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

   par croissance comparée. Donc Z admet une espérance et $E(Z)=1$. Le temps moyen est donc d'une seconde.

   (c) D'après l'énoncé, on a $W=\frac{1}{10}Z+1$.

   (d) La fonction de répartition de W est donnée par :

$$F_W(t)=P(W\leq t)=P\left(\frac{1}{10}Z+1\leq t\right)=P(Z\leq 10t-10)=F_Z(10t-10).$$

   Comme Z est à densité, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (là où f_Z est continue).

Donc F_W est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc W est à densité et une densité de W est donnée par :

$$f_W(t) = F'_W(t) = 10 f_Z(10t - 10)$$

et donc :

$$f_W(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 10e^{-10t-10} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

(e) Comme Z a une espérance, alors $W = \dfrac{1}{10} Z + 1$ également et

$$E(W) = \frac{1}{10} E(Z) + 1 = \frac{11}{10}.$$

5. (a) f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en 0. On étudie la convergence de son intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-t^2/2}dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-t^2/2}.$$

Soit $A \geq 0$.

$$\int_0^A te^{-t^2/2}dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 donc f est bien une densité de probabilité.

(b) La fonction de répartition F_X de X est donnée par :

- si $x \leq 0$: $F_Z(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0.$
- si $x > 0$: $F_Z(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} te^{-t^2/2}dt = 1 - e^{-x^2/2}.$

(c) X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge (absolument).

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt$ converge et est nulle.
- pour $A \geq 0$, $\displaystyle\int_0^A tf(t)\,dt = \int_0^A t^2 e^{-t^2/2}dt$ que l'on intègre par parties ($t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t^2/2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) :

$$\int_0^A tf(t)\,dt = \left[-te^{-t^2/2}\right]_0^A - \int_0^A e^{-t^2/2}dt = -Ae^{-A^2/2} - \int_0^A e^{-t^2/2}dt$$

La forme indéterminée $Ae^{-A^2/2}$ peut se lever en posant $X = A^2 \to +\infty$ et $Ae^{-A^2/2} = \sqrt{X}e^{-X/2} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc, avec le rappel de l'énoncé,

$$\int_0^A tf(t)\,dt \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ donc X a une espérance et $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.