Correction - DS 7 - Sujet B

Devoir surveillé du Samedi 20 Janvier

Exercice 1 (EDHEC 2021)

1. (a) On note $E = \operatorname{Vect}\left(I, M_a, M_a^2\right)$. Vérifions si la famille $\left(I, M_a, M_a^2\right)$ est libre. On a :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \text{ et } M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On peut tout écrire mais aussi ne considérer que la première colonne des matrices :

$$xI + yM_a + zM_a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x + (1-a)y + (1-a^2)z = 0 \\ 0x + 0y + (1-a)^2 z = 0 \end{cases}$$

Ce système étant triangulaire avec 3 pivots non nuls (car $a \neq 1$), sa seule solution est $x = y = z = 0$. Donc la famille $\left(I, M_a, M_a^2\right)$ est libre et c'est une base de E. Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a $\dim(E) = 3$.

(b) On a : $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer $(M_a - I)(M_a - aI)^2$, on remarque que $M_a - I = (1-a)J$ et $M_a - aI = (1-a)K$. Ce qui donne alors $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (1-a)J(1-a)^2K^2 = (1-a)^3 JK^2 = 0$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} 0 &= (M_a - I)(M_a - aI)^2 \\ &= (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I) \\ &= M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2 M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2 I \\ &= M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + (a^2 + 2a)M_a - a^2 I \end{aligned}$$

Donc $M_a^3 = (2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I$. Et M_a^3 appartient bien à E.

2. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

"il existe un unique triplet (u_n, v_n, w_n) tel que $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$".

Ini. $M_a^0 = I = 0M_a^2 + 0M_a + 0I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 1)$.
On vérifierait aisément aussi que $(u_1, v_1, w_1) = (0, 1, 0)$ et $(u_2, v_2, w_2) = (1, 0, 0)$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} M_a^{n+1} &= M_a.M_a^n = M_a(u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I) \quad (\text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}) \\ &= u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= u_n \left((2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I\right) + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= \left((2a+1)u_n + v_n\right) M_a^2 + \left(-a(a+2)u_n + w_n\right) M_a + a^2 u_n I \\ &= u_{n+1} M_a^2 + v_{n+1} M_a + w_{n+1} I \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, en posant

$$\begin{cases} u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$$

Ccl. Par récurrence, on a donc montré que la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Les relation de récurrence et l'initialisation à $(u, v, w) = (0, 0, 1)$ semblent correctes !!
Le problème se situe aux lignes 8 et 9 car, pour calculer les nouvelles valeurs de v et w, on utilise la valeur de u qui a déjà été changée à la ligne 7. Et donc au lieu de calculer $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n$ et $w_{n+1} = a^2 u_n$, on calcule $v_{n+1} = -a(a+2)u_{n+1} + w_n$ et $w_{n+1} = a^2 u_{n+1}$.

(c) Il aurait fallu sauvegarder la valeur de u qui sert à calculer.

```python
n = input('entrez une valeur pour n :')
a = input('entrez une valeur pour a :')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(n) :
    sauv = u
    u = (2*a+1)*u+v
    v = -a*(a+2)*sauv+w
    w = a*a*sauv
print(w,v,u)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= (2a+1)u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + w_{n+1} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n. \end{aligned}$$

4. (a) On a admis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}.$$

Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, il nous faut déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)a^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na^{n+1}$. On a :

$$(n-1)a^n = e^{\ln(n-1)} e^{n\ln(a)} = e^{\ln(n-1)+n\ln(a)} = e^{n\left(\frac{\ln(n-1)}{n} + \ln(a)\right)}.$$

Or $\dfrac{\ln(n-1)}{n} + \ln(a) = \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(1-1/n)}{n} + \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(a) < 0$ par croissance comparée.

Donc $n\left(\frac{\ln(n-1)}{n} + \ln(a)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $(n-1)a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On démontrerait de même que : $na^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2} = \dfrac{1}{(a-1)^2}$.

Ensuite, $w_{n+1} = a^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$.

Et enfin : $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{-a(a+2)}{(a-1)^2} + \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{-2a}{(a-1)^2}$.

(b) On a alors :

$$\begin{aligned}
L_a &= \lim_{n\to+\infty} M_a^n \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to\infty} w_n\right) I \\
&= \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 + \frac{-2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I\right) \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a - aI\right)^2
\end{aligned}$$

(c) On se souvient que $M_a - aI = (1-a)K$, donc

$$L_a = \frac{1}{(a-1)^2}(M_a - aI)^2 = \left(\frac{M_a - aI}{a-1}\right)^2 = K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne alors

$$L_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_a.$$

Exercice 2 (EDHEC 2020)

1. Dans le cas où $n = 1$, X ne prend que la valeur 1. On pioche donc une boule dans l'urne V, boule qui a une probabilité p d'être blanche. Ainsi, Y prend la valeur 1 avec la probabilité p, et 0 avec la probabilité $1-p$.

   Autrement dit, lorsque $n = 1$, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Il y a une boule portant chaque numéro entre 1 et n. Chaque numéro a donc la même probabilité d'être tiré.

   Par conséquent, X suit une loi uniforme dans $[\![1;n]\!]$.

   D'après le cours, on a alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors on tire k boules dans l'urne V. Dans ce cas, la variable aléatoire Y compte donc le nombre de succès (tirer une boule blanche) à une succession de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec une probabilité de succès égale à p.

   Par conséquent, la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

4. Le programme complété est le suivant :

```python
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
p = int(input('entrez la valeur de p :'))
X = rd.randint(1, n+1)
Y = rd.binomial(X, p)
```

5. (a) Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à k. Or, X peut prendre les valeurs de 1 à n. Donc $Y(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [\![0;k]\!]$, c'est-à-dire $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X = k)_{1\leq k\leq n}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X = k)\cap(Y = 0)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X = k)\cap(Y = 0)\right) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 0) \quad \text{(probas composées)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}P_{(X=k)}(Y = 0) \quad \text{(question 2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}q^k \quad \text{(question 3)}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^k
\end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q, avec $q \neq 1$. D'où

$$P(Y = 0) = \frac{1}{n} \times \frac{q(1-q^n)}{1-q} = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

(b) Soit $i \in [\![1;n]\!]$ quelconque. On a de même, par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X = k)_{1\leq k\leq n}$:

$$\begin{aligned}
P(Y = i) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}P_{(X=k)}(Y = i) \quad \text{(question 2)}\\
&= \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}P_{(X=k)}(Y = i) \quad (\text{car } P_{(X=k)}(Y = i) = 0 \text{ si } k < i \text{ (cf question 3)})
\end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après la question 3 :

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i}$$

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. On a alors :

$$i\binom{k}{i} = i\frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{k!}{(k-i)!(i-1)!} = k\frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!} = k\frac{(k-1)!}{((k-1)-(i-1))!(i-1)!}$$

Ce qui donne bien : $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$.

(b) La variable aléatoire Y ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Elle admet donc une espérance.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=0}^{n} iP(Y=i) \quad \text{car } Y(\Omega) = [\![0;n]\!] \\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(Y=i) \quad \text{(le terme pour } i=0 \text{ est nul)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad \text{(question 5.(b))} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad \text{(on permute les deux sommes)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad \text{(question 6.(a))}
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

(c) Soit $k \in [\![1;n]\!]$ quelconque. On commence par calculer la somme intérieure :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-1-j} \quad \text{(changement d'indice } j = i-1) \\
&= p \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} \\
&= p(p+q)^{k-1} \quad \text{(binôme de Newton)} \\
&= p \times 1^{k-1} \\
&= p
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (kp) = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ce qui donne finalement : $E(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}$.

7. (a) On procède comme aux questions 6.(a) et 6.(b). Soit i et k deux entiers naturels tels que $2 \leq i \leq k \leq n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
i(i-1)\binom{k}{i} &= i(i-1)\frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{k!}{(k-i)!(i-2)!} = k(k-1)\frac{(k-2)!}{(k-i)!(i-2)!} \\
&= k(k-1)\frac{(k-2)!}{((k-2)-(i-2))!(i-2)!}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $i(i-1)\binom{k}{i} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$. Ensuite, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)P(Y=i) \quad \text{(théorème du transfert)} \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(Y=i) \quad \text{(les termes pour } i=0 \text{ et } i=1 \text{ sont nuls)} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{i(i-1)}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad \text{(question 5.(b))} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=i}^{n} i(i-1)\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{k} i(i-1)\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad \text{(on permute les deux sommes)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{k} k(k-1)\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \quad \text{(cf calcul ci-dessus)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(k(k-1) \sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

(b) On procède comme à la question 6.(c). On commence par simplifier la somme intérieure :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k} \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-2-j} \quad \text{(changement d'indice } j=i-2\text{)} \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} \\
&= p^2 (p+q)^{k-2} \quad \text{(binôme de Newton)} \\
&= p^2 \times 1^{k-2} \\
&= p^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k(k-1)p^2 \right) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n} (k^2-k) \\
&= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} = \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6} \\
&= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{(n+1)(n-1)p^2}{3}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $E(Y(Y-1)) = \dfrac{(n^2-1)p^2}{3}$.

(c) Lorsque $n = 1$, la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{0;1\}$, donc dans tous les cas $Y(Y-1) = 0$. On en déduit que $E(Y(Y-1)) = 0$. Or, $\dfrac{(1^2-1)p^2}{3} = 0$ également. Ainsi, l'expression obtenue à la question précédente reste valable lorsque $n = 1$.

(d) On a $E(Y(Y-1)) = E(Y^2-Y) = E(Y^2)-E(Y)$ par linéarité de l'espérance. On en déduit que $E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y)$, puis que $V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2$.
Remarque : On peut ainsi calculer $V(Y)$ avec les résultats des questions 6.(c) et 7.(b). On trouve (après calculs) :

$$V(Y) = \frac{(np-7p+6)(n+1)p}{12}$$

Exercice 3 (EDHEC 2006)

1. On vérifie les critères d'une densité de probabilité :

   - f est positive ou nulle.
   - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, 1/2 et 1.
   - Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1/2} f(t)dt + \int_{1/2}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1/2} \frac{1}{2(1-t)^2}dt + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2t^2}dt + \int_{1}^{+\infty} 0dt \\
&= 0 + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{t}\right]_{1/2}^{1} + 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.
\end{aligned}$$

   Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

2. Pour tout x réel, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Plusieurs cas :

   - si $x < 0$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
   - si $0 \leq x < \frac{1}{2}$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{x} \frac{1}{2(1-t)^2}dt = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right]_0^{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{x}{1-x}$.
   - si $\frac{1}{2} \leq x < 1$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1/2} \frac{1}{2(1-t)^2}dt + \int_{1/2}^{x} \frac{1}{2t^2}dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{t}\right]_{1/2}^{x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$.
   - si $x \geq 1$: $F(x) = 1$.

3. On étudie la convergence (absolue) de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ impropre en $\pm\infty$.

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$.
   - On pense à l'astuce au dénominateur pour intégrer :

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1/2} tf(t)\,dt &= \int_{0}^{1/2} \frac{t}{2(1-t)^2}dt = \int_{0}^{1/2} \frac{-(1-t)+1}{2(1-t)^2}dt \\
&= \int_{0}^{1/2} \frac{-1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1-t)^2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right]_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(1/2) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{1/2}^{1} tf(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} \frac{t}{2t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\ln(2).$
- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0.$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge donc X a une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{2}$.

4. (a) Par le théorème de transfert, on étudie l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt$ impropre en $\pm\infty$, ce qui équivaut ici à la convergence simple car $(t-1)^2$ est de signe constant au voisinage de $\pm\infty$. Plusieurs cas :
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0.$
   - $\displaystyle\int_{0}^{1/2} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{0}^{1/2} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{0}^{1/2} \frac{(t-1)^2}{2(1-t)^2}dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_{0}^{1/2} = \frac{1}{4}.$
   - Sur $[1/2,1]$, il faut développer :
   $$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} (t-1)^2 f(t)\,dt &= \int_{1/2}^{1} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} \frac{t^2-2t+1}{2t^2}dt\\ &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}dt = \left[\frac{1}{2}t - \ln(t) - \frac{1}{2t}\right]_{1/2}^{1}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ln(2) + 1 = \frac{3}{4} - \ln(2)\end{aligned}$$
   - $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt = 0$

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt$ converge absolument donc $(X-1)^2$ a une espérance et
   $$E\left((X-1)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2 f(t)\,dt = 1 - \ln(2).$$

   (b) On a alors $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$. Donc X^2 a une espérance et
   $$E\left(X^2\right) = E\left((X-1)^2\right) + 2E(X) - 1 = 1 - \ln(2) + 1 - 1 = 1 - \ln(2)$$
   Donc X a une variance et avec Koenig-Huygens,
   $$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{3}{4} - \ln(2).$$

5. (a) On a $Y = 1$ quand $Z = 0$ et $Y = 0$ quand $Z = 1$. Donc $Y = 1 - Z$
   Comme Y est fonction affine de Z alors le coefficient de corrélation linéaire vaut ± 1. Et comme le coefficient directeur est négatif, alors $\rho(Y,Z) = -1$.

   (b) D'autre part, le coefficient de corrélation linéaire est $\rho(Y,Z) = \dfrac{Cov(Y,Z)}{\sigma(Y)\,\sigma(Z)}$.
   Donc $Cov(Y,Z) = -\sigma(Y)\,\sigma(Z)$. Comme $V(Y) = (-1)^2 V(Z) = V(Z)$, on a :
   $$\sigma(Y) = \sigma(Z) = \sqrt{V(Y)} \text{ et } Cov(Y,Z) = -V(Y).$$
   On a $P(Y=1) = P\left(X \leq \dfrac{1}{2}\right) = F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$. Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et finalement :
   $$Cov(Y,Z) = -V(Y) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 4 (EDHEC 1998)

1. (a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x} > 0$. On peut alors dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	1

(b) On étudie les variations de la différence : soit $g(x) = x - f(x)$. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = 1 - e^{-x} = f(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0 $\nearrow$	

On a donc $g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x > 0,\ f(x) < x$ et $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$.

2. (a) Par récurrence, montrons la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt\text{"}.$$

Ini. Si $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{0+1} \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} e^{-t} dt = 1 - \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 + (e^{-x} - 1) = e^{-x}.$$

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

A l'aide d'une IPP, les fonctions $t \mapsto \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ étant C^1,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

On a alors avec l'hypothèse de récurrence puis l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, la formule est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour $n = 2$, on obtient :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{-t} dt$$

donc

$$x - f(x) = e^{-x} - 1 + x = \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{-t} dt$$

Pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{(x-t)^2}{2!} e^{-t} \geq 0$ donc (bornes croissantes) $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{-t} dt \geq 0$.

Finalement, $x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

De même pour $n = 3$, on a

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} e^{-t} dt$$

donc

$$x - f(x) = e^{-x} - 1 + x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} e^{-t} dt$$

Comme précédemment $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} e^{-t} dt \geq 0$ et $x - f(x) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

On a donc bien pour tout $x \geq 0$:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

3. (a) On procède par récurrence :

Ini. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in]0, 1]$

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0, 1]$.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $0 < u_n \leq 1$, alors $0 = f(0) < f(u_n) \leq f(1) \leq 1$ d'où $u_{n+1} \in]0, 1]$.

Ccl. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$

(b) Comme pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq x$ alors comme $u_n \geq 0$ alors $f(u_n) \leq u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

(c) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 (car $u_n > 0$). Par le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\ell \in \mathbb{R}_+$ alors, en passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$. La seule solution est $\ell = 0$ d'après la première question. Finalement, $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

4. (a) On a $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_n$ par télescopage.

(b) Pour montrer que la série est convergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles a une limite finie :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = 1 - u_{n+1} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

Donc la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ converge et sa somme vaut 1.

(c) On détermine la limite du quotient par encadrement comme $u_n - u_{n+1} = u_n - f(u_n)$ et que $u_n > 0$, on a donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_n^2}{2} - \frac{{u_n}^3}{6}\right)\frac{2}{u_n^2} &\leq \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{u_n^2}{2}} \leq \frac{u_n^2}{2}\frac{2}{u_n^2} \\ 1 - \frac{u_n}{3} &\leq \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{u_n^2}{2}} \leq 1\end{aligned}$$

Comme $u_n \to 0$, on a par encadrement $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{\frac{u_n^2}{2}} \to 1$ et $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ en $+\infty$.

(d) Comme la série $\sum\limits_{n\geq}(u_n - u_{n+1})$ est convergente et que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{u_n^2}{2}$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ est une série convergente.

5. ϕ est continue sur $]0,+\infty[$ par quotient de fonctions continues. En 0^+ :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}-1}{-x} \to 1$$

car $e^X - 1 \sim X$ quand $X \to 0$ (on fait apparaître le quotient de la définition de l'équivalent).

Donc ϕ est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$.

6. (a) Comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que 0 et $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale est bien définie.

Comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une primitive Φ qui est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Alors

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \phi(t)dt = \frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x}.$$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonction dérivable. Et elle y est donc continue.

(b) On a ici à encadrer une intégrale. On s'intéresse donc d'abord à son contenu. On reprend l'inégalité sur $x - f(x)$:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x \leq -f(x) \leq \frac{x^2}{2} - x$$
$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x \geq f(x) \geq -\frac{x^2}{2} + x$$
$$\Rightarrow -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + 1 \geq \frac{f(x)}{x} \geq -\frac{x}{2} + 1$$

En intégrant sur $[0, x]$ (bornes croissantes) :

$$\int_0^x \left(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + 1\right) dt \geq \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt \geq \int_0^x \left(-\frac{t}{2} + 1\right) dt$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + x \geq \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt \geq -\frac{1}{4}x^2 + x$$

d'où finalement en divisant par $x > 0$: $1 - \dfrac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

(c) On sait déjà que g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, il reste donc à démontrer la continuité en 0^+.

Comme $1 - \dfrac{x}{4} \to 1$ et $1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18} \to 1$ alors par encadrement $g(x) \to 1 = g(0)$ quand $x \to 0$ et g est continue en 0^+ donc sur $\mathbb{R}_+$.

De même, il reste à déterminer la dérivabilité en 0^+ en déterminant la limite du taux d'accroissements :

$$\frac{1 - \frac{x}{4} - 1}{x} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq \frac{1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18} - 1}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}.$$

Par encadrement, $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \to -\dfrac{1}{4}$ donc g est dérivable 0 et $g'(0) = -1/4$.

7. (a) Pour majorer l'intégrale, on majore d'abord la fonction :

pour $t \geq 0$ on a $1 \geq e^{-t} > 0$ donc $0 \leq 1 - e^{-t} \leq 1$ et $\dfrac{1 - e^{-t}}{t} \leq \dfrac{1}{t}$.

En intégrant (bornes croissantes) : $\displaystyle\int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt$ donc $\displaystyle\int_1^x \phi(t) dt \leq \ln(x)$.

(b) En divisant pas $x > 1$: $0 \leq \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^x \phi(t) dt \leq \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \phi(t) dt = 0$.

Et finalement $g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 \phi(t) dt + \dfrac{1}{x} \int_1^x \phi(t) dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

8. (a) ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet une primitive Φ qui est C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Comme les primitives sont définies à une constante près, on choisit Φ telle que $\Phi(0) = 0$. Alors :

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \phi(t) dt = \frac{1}{x} [\Phi(t)]_0^x = \frac{\Phi(x)}{x} \quad \text{donc} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Phi(x) + \frac{1}{x} \phi(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

en posant $h(x) = -\Phi(x) + x\phi(x)$

(b) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$h'(x) = -\Phi'(x) + \phi(x) + x\phi'(x) = x\phi'(x) \quad \text{car } \Phi'(x) = \phi(x)$$

Comme $\phi'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \dfrac{xe^{-x} - (1 - e^{-x})}{x^2}$, on a : $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

(c) k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $k'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$ d'où

x	0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	0	$\searrow$	

(d) Pour tout $x > 0$, $k(x) < 0$ donc $h'(x) = \dfrac{k(x)}{x} < 0$ donc

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	

Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2} < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) On obtient le tableau de variation de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0

On peut alors tracer la courbe représentative de g en faisant apparaitre :

- L'asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
- La valeur de g en 0 ($g(0) = 1$).
- La demi-tangente en 0 ($g'(0) = -1/4$).