Correction - DS 7 (B)

Devoir surveillé du Samedi 18 Janvier**Exercice 1 (EDHEC 1997)**

1. (a) On a :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est génératrice de E . On peut montrer facilement qu'elle est libre (à faire). C'est donc une base de E et E est de dimension 3.

- (b) Les matrices de E sont triangulaires supérieures dont tous les éléments diagonaux sont nuls, elles sont donc non inversibles.
- (c) Soit M une matrice non nulle de E . Si M est diagonalisable, alors $M = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M . Comme M n'a qu'une seule valeur propre égale à 0 (car M est triangulaire supérieure et que ses éléments diagonaux sont nuls), $D = 0$ et donc $M = PDP^{-1} = 0$. Ceci contredit que M est non nulle. Donc M n'est pas diagonalisable.

2. (a) Soit $A \in E$. Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $k \geq 3$, $A^k = 0$.

(b) Avec la définition de l'énoncé en prenant $p = 3$ avec la question précédente, on a :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 \quad \text{et} \quad \ln(I + A) = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k+1}}{k!} A^k = A - \frac{1}{2} A^2.$$

3. Avec la question 2, on a : $\ln(\exp(A)) = \ln(I + A + \frac{1}{2} A^2)$. Or :

$$\left(A + \frac{1}{2} A^2 \right)^2 = A^2 \quad \text{et} \quad \left(A + \frac{1}{2} A^2 \right)^3 = 0.$$

On peut donc appliquer la définition de $\ln$:

$$\begin{aligned} \ln(\exp(A)) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(A + \frac{1}{2} A^2 \right)^k = \left(A + \frac{1}{2} A^2 \right) - \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{2} A^2 \right)^2 \\ &= A + \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A^2 = A. \end{aligned}$$

4. (a) Comme A et $A^2 \in E$ et que E est un espace vectoriel, $\ln(I + A) = A - \frac{1}{2} A^2 \in E$.

(b) On remarque $(\ln(I + A))^2 = A^2$ et $(\ln(I + A))^3 = 0$. Donc par définition de $\exp$:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(I + A)) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} (\ln(I + A))^k = I + \ln(I + A) + \frac{1}{2} (\ln(I + A))^2 \\ &= I + A - \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^2 = I + A. \end{aligned}$$

5. Montrons par récurrence $\mathcal{P}(m)$: " $\exp(mA) = (\exp(A))^m$ ".

Ini. $\exp(1 \times A) = \exp(A) = \exp(A)^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Héré. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(m)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(m + 1)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} (\exp(A))^{m+1} &= (\exp(A))^m \times \exp(A) = \exp(mA) \times \exp(A) \\ &= \left(I + mA + \frac{1}{2} m^2 A^2 \right) \times \left(I + A + \frac{1}{2} A^2 \right) \\ &= I + A + \frac{1}{2} A^2 + mA + mA^2 + \frac{1}{2} m^2 A^2 \\ &= I + (m + 1)A + \frac{1}{2} (m + 1)^2 A^2 = \exp((m + 1)A). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(m + 1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\exp(mA) = (\exp(A))^m$.

6. On a :

$$\begin{aligned} \exp(A) \times \exp(-A) &= \left(I + A + \frac{1}{2} A^2 \right) \times \left(I + (-A) + \frac{1}{2} (-A)^2 \right) \\ &= \left(I + A + \frac{1}{2} A^2 \right) \times \left(I - A + \frac{1}{2} A^2 \right) \\ &= I - A + \frac{1}{2} A^2 + A - A^2 + \frac{1}{2} A^2 = I. \end{aligned}$$

Donc $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

7. Si $A, B \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(A) \times \exp(B) &= \left(I + A + \frac{1}{2} A^2 \right) \times \left(I + B + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ &= I + B + \frac{1}{2} B^2 + A + AB + \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^2 B + \frac{1}{4} A^2 B^2. \end{aligned}$$

Comme $A, B \in E$, $AB^2 = A^2 B = A^2 B^2 = 0$ (à vérifier à la main).

Donc $\exp(A) \times \exp(B) = I + (A + B) + \frac{1}{2} (A^2 + 2AB + B^2)$.

Alors :

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \exp(A) \times \exp(B) \\ \Leftrightarrow I + (A + B) + \frac{1}{2} (A + B)^2 &= I + (A + B) + \frac{1}{2} (A^2 + 2AB + B^2) \\ \Leftrightarrow (A + B)^2 &= (A^2 + 2AB + B^2) \\ \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ \Leftrightarrow BA &= AB. \end{aligned}$$

Ainsi, $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$ si et seulement si A et B commutent.

Exercice 2 (EDHEC 2020)

1. Dans le cas où $n = 1$, X ne prend que la valeur 1. On pioche donc une boule dans l'urne V , boule qui a une probabilité p d'être blanche. Ainsi, Y prend la valeur 1 avec la probabilité p , et 0 avec la probabilité $1 - p$.

Autrement dit, lorsque $n = 1$, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

2. Il y a une boule portant chaque numéro entre 1 et n . Chaque numéro a donc la même probabilité d'être tiré.

Par conséquent, X suit une loi uniforme dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

D'après le cours, on a alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

3. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors on tire k boules dans l'urne V . Dans ce cas, la variable aléatoire Y compte donc le nombre de succès (tirer une boule blanche) à une succession de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec une probabilité de succès égale à p .

Par conséquent, la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

4. Le programme complété est le suivant :

```

1 | n = int(input('entrez la valeur de n :'))
2 | p = int(input('entrez la valeur de p :'))
3 | X = rd.randint(1, n+1)
4 | Y = rd.binomial(X, p)

```

5. (a) Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à k . Or, X peut prendre les valeurs de 1 à n . Donc $Y(\Omega) = \bigcup_{k=1}^n \llbracket 0; k \rrbracket$, c'est-à-dire $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (X = k) \cap (Y = 0)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n P\left(\bigcup_{k=1}^n (X = k) \cap (Y = 0)\right) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 0) \quad (\text{probas composées}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = 0) \quad (\text{question 2}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} q^k \quad (\text{question 3}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k \end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q , avec $q \neq 1$. D'où

$$P(Y = 0) = \frac{1}{n} \times \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

(b) Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ quelconque. On a de même, par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$:

$$\begin{aligned} P(Y = i) &= \sum_{k=1}^n P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i) \quad (\text{question 2}) \\ &= \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i) \quad (\text{car } P_{(X=k)}(Y = i) = 0 \text{ si } k < i \text{ (cf question 3)}) \end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après la question 3 :

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. On a alors :

$$i \binom{k}{i} = i \frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{k!}{(k-i)!(i-1)!} = k \frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!} = k \frac{(k-1)!}{((k-1)-(i-1))!(i-1)!}$$

Ce qui donne bien : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$.

(b) La variable aléatoire Y ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Elle admet donc une espérance.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^n iP(Y = i) \quad \text{car } Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \\ &= \sum_{i=1}^n iP(Y = i) \quad (\text{le terme pour } i = 0 \text{ est nul}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad (\text{question 5.(b)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad (\text{on permute les deux sommes}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad (\text{question 6.(a)}) \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

(c) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ quelconque. On commence par calculer la somme intérieure :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-1-j} \quad (\text{changement d'indice } j = i - 1) \\ &= p \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} \\ &= p(p+q)^{k-1} \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= p \times 1^{k-1} \\ &= p \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (kp) = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ce qui donne finalement : $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. (a) On procède comme aux questions 6.(a) et 6.(b). Soit i et k deux entiers naturels tels que $2 \leq i \leq k \leq n$. On a alors :

$$\begin{aligned} i(i-1) \binom{k}{i} &= i(i-1) \frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{k!}{(k-i)!(i-2)!} = k(k-1) \frac{(k-2)!}{(k-i)!(i-2)!} \\ &= k(k-1) \frac{(k-2)!}{((k-2)-(i-2))!(i-2)!}. \end{aligned}$$

Ce qui donne : $i(i-1) \binom{k}{i} = k(k-1) \binom{k-2}{i-2}$. Ensuite, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^n i(i-1)P(Y=i) \quad (\text{théorème du transfert}) \\ &= \sum_{i=2}^n i(i-1)P(Y=i) \quad (\text{les termes pour } i=0 \text{ et } i=1 \text{ sont nuls}) \\ &= \sum_{i=2}^n \left(\frac{i(i-1)}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad (\text{question 5.(b)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^k i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad (\text{on permute les deux sommes}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^k k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \quad (\text{cf calcul ci-dessus}) \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

(b) On procède comme à la question 6.(c). On commence par simplifier la somme intérieure :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-2-j} \quad (\text{changement d'indice } j = i - 2) \\ &= p^2 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} \\ &= p^2 (p + q)^{k-2} \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= p^2 \times 1^{k-2} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k(k-1)p^2) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} = \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)((2n+1) - 3)}{6} \\ &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{(n+1)(n-1)p^2}{3}. \end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$.

(c) Lorsque $n = 1$, la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{0; 1\}$, donc dans tous les cas $Y(Y-1) = 0$. On en déduit que $E(Y(Y-1)) = 0$. Or, $\frac{(1^2-1)p^2}{3} = 0$ également.

Ainsi, l'expression obtenue à la question précédente reste valable lorsque $n = 1$.

(d) On a $E(Y(Y-1)) = E(Y^2 - Y) = E(Y^2) - E(Y)$ par linéarité de l'espérance. On en déduit que $E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y)$, puis que $V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2$.

Remarque : On peut ainsi calculer $V(Y)$ avec les résultats des questions 6.(c) et 7.(b). On trouve (après calculs) :

$$V(Y) = \frac{(np - 7p + 6)(n + 1)p}{12}$$

Exercice 3 (EDHEC 2000)

1. On a :

$$e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

en multipliant par $e^x > 0$ à la deuxième équivalence et en composant par la fonction logarithme à la troisième. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

2. (a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathcal{D}$ et on a pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0$$

De plus, $\ln(e^x - e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $\ln(e^x - e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi, f strictement croissante sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(b) Comme f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathcal{D} =]0, +\infty[$, elle est bijective de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ (d'après le théorème de la bijection).

Comme $0 \in \mathbb{R}$, 0 admet un unique antécédent $\alpha \in \mathcal{D}$ par f . Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α .

On résout cette équation pour donner une valeur exacte de α :

$$\ln(e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0$$

Soit $X = e^x$. L'équation $X^2 - X - 1 = 0$ du second degré a pour discriminant 5 et pour racines

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Donc l'unique solution est $\alpha = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

(c) La pente vaut : $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$. Comme $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$,

$$f'(\alpha) = e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{6 + 2\sqrt{5} + 4}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{(5 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5}.$$

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

3. (a) On a (par continuité du logarithme lorsque l'on passe à la limite) :

$$f(x) - x = \ln(e^x(1 - e^{-2x})) - x = x + \ln(1 - e^{-2x}) - x = \ln(1 - e^{-2x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

(b) On a donc une asymptote Δ d'équation $y = x$ en $+\infty$.

(c) Comme $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x}) < 0$ car $1 - e^{-2x} < 1$, la courbe de f est en dessous de l'asymptote.

4. Il faut faire figurer sur la courbe

- le point d'abscisse α (ordonnée nulle) avec sa tangente ;
- l'asymptote oblique en respectant les positions relatives ;
- l'asymptote verticale en 0.

5. (a) h est définie, continue et dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$h'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 1 = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1}.$$

Pour $\lambda > 0$, on a déjà que g_λ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en α . De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} 0 dx + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{e^{2x} - 1} dx.$$

Or pour tout $M \geq \alpha$,

$$\int_{\alpha}^M g(x) dx = \left[\frac{\lambda}{2} h(x) \right]_{\alpha}^M = \frac{\lambda}{2} (h(M) - h(\alpha)).$$

Or $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$ et $f(M) - M \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow +\infty$ (question 3.(a)). Donc :

$$\int_{\alpha}^M g(x) dx = \frac{\lambda}{2} ((f(M) - M) - (-\alpha)) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{\lambda\alpha}{2}.$$

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ converge et vaut $\frac{\lambda\alpha}{2}$.

Donc g_λ est une densité si et seulement si $\lambda = \frac{2}{\alpha}$.

(b) Comme $X(\Omega) = [\alpha, +\infty[$, $G_\lambda(x) = 0$ si $x < \alpha$.

Si $x \geq \alpha$, on a en réutilisant les calculs de la question précédente :

$$G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x g_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^\alpha 0dt + \int_\alpha^x g_\lambda(t)dt = \frac{2/\alpha}{2}(h(x) - h(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}(h(x) + \alpha).$$

Exercice 4 (EDHEC 2018)

1. (a) Utilisons le théorème de positivité des intégrales.

- Premier cas : si $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Par positivité de l'intégrale (bornes croissantes), $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2)dt \geq 0$.

- Deuxième cas : si $x \leq 0$. La fonction $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Par positivité de l'intégrale (bornes décroissantes), $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2)dt \leq 0$.

Ainsi, f est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $] - \infty, 0]$.

(b) La fonction $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2) dt = [F(t)]_0^x = F(x) - F(0).$$

Donc f est C^1 et $f'(x) = F'(x) = \ln(1 + x^2)$.

(c) Comme $f'(x) = \ln(1 + x^2) \geq 0$ (f' s'annule uniquement en 0), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ (car $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a avec le changement de variable $u = -t$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1 + t^2)dt = \int_0^x \ln(1 + (-u)^2)(-du) = - \int_0^x \ln(1 + u^2)du = -f(x).$$

Ainsi, f est impaire.

(b) $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Ainsi, f est concave sur $] - \infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. Elle admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(0, 0)$.

3. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{t^2}{1 + t^2} = a + \frac{b}{1 + t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{at^2 + (a + b)}{1 + t^2}.$$

Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1 + t^2} = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$.

(b) Faisons une IPP sur $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$:

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{l} \ln(1+t^2) \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 \\ \searrow \\ t \end{array} \\ - \left| \begin{array}{l} \frac{2t}{1+t^2} \\ 1 \end{array} \right. \quad \rightarrow t \end{array}$$

$t \mapsto \ln(1+t^2)$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

$$f(x) = [t \ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2} dt = x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Or d'après la question précédente,

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Ainsi, $f(x) = x \ln(1+x^2) - 2 \left(x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt\right) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$

4. (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Or $\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$).

Ainsi, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente.

(b) Nous avons démontré à la question 3.(b) que $f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Or,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x^2) - 2) = +\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est finie d'après la question précédente.

Ainsi, $2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est négligeable devant $x(\ln(1+x^2) - 2)$ au voisinage de $+\infty$.

Donc, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x(\ln(1+x^2) - 2) \underset{+\infty}{\sim} x \ln(1+x^2).$

(c) Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = o(2 \ln(x))$ en $+\infty$.

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x \ln(x).$

(d) De la même façon, si $x < 0$, $f(x) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} x \ln(x^2) = 2x \ln(-x)$

5. (a) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0$ d'après les calculs précédents. D'autre part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Ainsi, $f^{(3)}(0) = 2.$

(c) Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x^3}{3!} \cdot 2 + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$.

6. (a) Si on considère l'expression générale de u_n , $u_0 = \int_0^1 1 dt = 1$ ce qui est cohérent avec la valeur de u_0 donnée.

(b) $u_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt = f(1)$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par construction. Pour croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(2).$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, comme $\ln(1+t^2) \in [0, 1]$, on a $(\ln(1+t^2))^n \geq (\ln(1+t^2))^{n+1}$.

En intégrant pour t allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on obtient

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \geq \int_0^1 (\ln(1+t^2))^{n+1} dt = u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Pour tout $t \in [0, 1]$, $(\ln(1+t^2))^n \geq 0$. Par la positivité de l'intégrale (bornes croissantes),

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \geq 0 \text{ et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0.$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge par théorème des suites monotones.

8. (a) Soit $t \in [0, 1]$. En partant des inégalités obtenues à la question 8.(a) et par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(2) \Rightarrow 0 \leq (\ln(1+t^2))^n \leq (\ln(2))^n.$$

En intégrant pour t allant de 0 à 1 (bornes croissante), on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \leq \int_0^1 (\ln(2))^n dt = (\ln(2))^n.$$

(b) • On a $0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2))^n = 0$ car $\ln(2) \in]-1, 1[$. D'après le théorème de l'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

• On a $0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$ et la série de terme général $(\ln(2))^n$ converge en tant que série géométrique car $\ln(2) \in]-1, 1[$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

9. (a) Soit $t \in [0; 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(2) &\Rightarrow 1 - \ln(2) \leq 1 - \ln(1+t^2) \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{1 - \ln(2)} \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(2)} \quad (\text{car } \ln(1+t^2))^n \geq 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(2)} dt \quad (\text{bornes croissantes}) \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{1 - \ln(2)} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \\ &\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} \leq \frac{u_n}{1 - \ln(2)}. \end{aligned}$$

(b) On a $0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

D'après le théorème de l'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0$.

(c) Soit n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^k dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k \right) dt \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \quad (\text{somme géométrique avec } \ln(1+t^2) \neq 1) \end{aligned}$$

(d) Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$

Or d'après la question 10.(b), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt = 0$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt$.