Correction - DS 8 (A)

Devoir surveillé du Mardi 20 Février

Exercice 1 (ECRICOME 2006)

1. On calcule le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x)}{1/x^2} &= x^{n+2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}+(n+2)\ln(x)\right)\\ &= \exp\left[x^2\left(-\frac{1}{2}+(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right]\end{aligned}$$

Comme $\ln(x) = o\left(x^2\right)$ (par croissances comparées), $\left(-\frac{1}{2}+(n+2)\frac{\ln(x)}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} -\frac{1}{2}$.

Par opération sur les limites et par composition avec la fonction exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{1/x^2} = 0$.

Ainsi, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

2. $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est impropre en $+\infty$ car f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.

Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$.

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge également.

3. (a) Soit $A > 0$. On a $\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx = \int_0^A x^{n+1}\times x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$.

On réalise une intégration par partie selon le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} + & x^{n+1} & & x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\ & & \searrow & \\ - & (n+1)x^n & \longrightarrow & -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\end{array}$$

Comme $x\mapsto x^{n+1}$ et $x\mapsto\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ sont C^1 sur $[0,A]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx &= \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)x^{n+1}\right]_0^A - \int_0^A -(n+1)\,x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\\ &= -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right)A^{n+1}+0+(n+1)\int_0^A f_n(x)dx.\end{aligned}$$

Lorsque $A\to+\infty$, les deux intégrales convergent et valent I_{n+2} et I_n (question 2).

De plus, $A^{n+1}\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ (question 1).

On obtient alors, en passant à la limite dans l'égalité obtenue, $I_{n+2} = (n+1)\,I_n$.

(b) On a $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1$ car c'est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

Par parité, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}$ donc $I_0 = \int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(c) On a $I_1 = \int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$. On calcule l'intégrale partielle, avec $A \geq 0$:

$$\int_0^A x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^A = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underset{A\to+\infty}{\to} 1.$$

Donc I_1 converge (on retrouve le résultat de la question 2) et $I_1 = 1$.

(d) On procède alors par récurrence en notant $\mathcal{P}(n)$ la propriété à démontrer.

Ini. Pour $n = 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cdot 0)!}{2^0 0!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = I_0 \qquad \textbf{et} \qquad 2^0 0! = 1 = I_1.$$

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \textbf{et} \qquad I_{2n+1} = 2^n n!.$$

Alors avec la question 3.(a), on a :

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= I_{2n+2} = (2n+1)\, I_{2n} = (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(2n+2)\,2^n n!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{2\cdot 2^n\,(n+1)\,n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)!} \end{aligned}$$

et

$$I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3} = (2n+2)\, I_{2n+1} = (2n+2)\, 2^n n! = 2\,(n+1)\, 2^n n! = (n+1)! 2^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.

4. (a) f est continue sauf peut-être en 0. f est positive sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{+\infty} f_1(x)dx = 0 + I_1 = 1$$

d'après la question 3.(c).

Donc f est une densité de probabilité.

(b) i. X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge absolument (ce qui est équivalent à montrer la convergence ici). Or :

- $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx = 0$,
- $\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^{+\infty} f_2(x)dx = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2!}{2^1 1!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donc X a une espérance et $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

ii. X admet un moment d'ordre 2 si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge absolument (ce qui est équivalent à montrer la convergence ici). Or :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx = 0$,
- $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^{+\infty} f_3(x)dx = I_3 = 2^1 1! = 2.$

Donc X admet un moment d'ordre 2 et $E\left(X^2\right) = 2$.
Donc X admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5. (a) $Y(\Omega) = X^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc pour tout $x < 0$, $G(x) = 0$.
Soit $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) = P\left(X^2 \leq x\right) = P\left(|X| \leq \sqrt{x}\right) \quad \text{(par croissance de la racine)} \\ &= P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = P\left(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x}\right) \quad \text{(car } X \text{ est à densité)} \\ &= F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

(b) On montre que G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf peut-être en 0 :

- Sur $]-\infty, 0[$, $G(x) = 0$ qui est C^1.
- Sur $]0, +\infty[$, $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right)$ qui est C^1 par opération sur les fonctions C^1 (F est C^1 sauf peut-être en 0 car X est à densité et f est continue sauf peut-être en 0).
- En 0 : pour $x < 0$, $G(x) = 0 \underset{x\to 0^-}{\to} 0$, $G(0) = F\left(\sqrt{0}\right) - F\left(-\sqrt{0}\right) = F(0) - F(0) = 0$ et pour $x > 0$, $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\to} F(0) - F(0) = 0$ (par continuité de F en 0 car X est à densité). Donc G est continue en 0.

Ainsi, G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf peut-être en 0. Donc Y est à densité.

Pour déterminer une densité g de Y, on dérive G là où elle est C^1 et on donne une valeur arbitraire ailleurs :

- Sur $]-\infty, 0[$, $g(x) = G'(x) = 0$.
- En 0, on pose $g(0) = 0$.
- Sur $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}F'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}F'\left(-\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}e^{-x/2} + 0\right] \quad \left(\text{car } -\sqrt{x} < 0\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-x/2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) On reconnait que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$. Donc, avec les formule du cours, $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 4$.

Exercice 2 (ECRICOME 2023 - Sujet zéro 2)

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, centré en 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x).$$

Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. D'une part, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   D'autre part, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$
   On en déduit le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

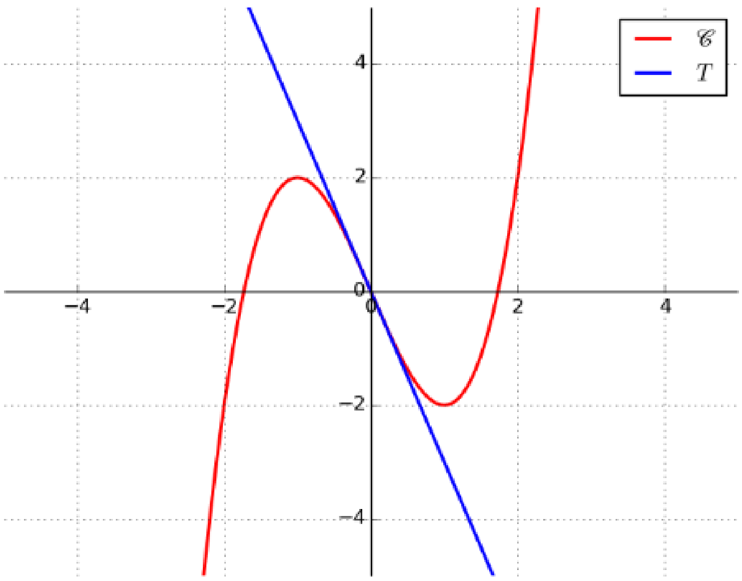
3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$. Donc f'' est positive sur $[0, +\infty[$, négative sur $]-\infty, 0]$ et s'annule et change de signe en 0.

   Donc f est convexe sur $[0, +\infty[$, concave sur $]-\infty, 0]$ et le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

4. T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = -3x$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-3x) = x^3$ est du signe de x. Donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de T sur $]-\infty, 0]$ et au-dessus de T sur $[0, +\infty[$.

5. En regroupant les informations obtenues aux questions précédentes, on obtient la figure suivante :



6. (a) Soit a un réel tel que $|a| < 2$, c'est-à-dire $-2 < a < 2$.

   - D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $f([1, +\infty[) = [-2, +\infty[$ (d'après le théorème de la bijection).
     Or $-a \in [-2, +\infty[$. Donc $-a$ admet un unique antécédent α par f dans $[1, +\infty[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution α dans $[1, +\infty[$.

- D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,1[$. D'après la question 1, f est impaire sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-1,1[$. Donc f réalise une bijection de $]-1,1[$ vers $f(]-1,1[)=]-2,2[$ (d'après le théorème de la bijection).
  Or $-a \in]-2,2[$. Donc $-a$ admet un unique antécédent β par f dans $]-1,1[$. Autrement dit, l'équation $f(x)=-a$ possède une unique solution β dans $]-1,1[$.
- D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. D'après la question 1, f est impaire sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$. Donc f réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ vers $f(]-\infty,-1])=]-\infty,2]$ (d'après le théorème de la bijection).
  Or $-a \in]-\infty,2]$. Donc $-a$ admet un unique antécédent γ par f dans $]-\infty,-1]$. Autrement dit, l'équation $f(x)=-a$ possède une unique solution γ dans $]-\infty,-1]$.

Finalement, l'équation $x^3-3x-a=0$ possède exactement trois solutions réelles distinctes α, β et γ.

(b) Supposons que $|a|>2$, c'est-à-dire $a>2$ ou $a<-2$. On distingue deux cas.

- Si $-a>2$, alors $-a \notin f(]-\infty,1])$ et $-a \in f(]1,+\infty[)$, donc d'après la question précédente, l'équation $f(x)=-a$ admet une unique solution réelle, qui appartient à $]1,+\infty[$.
- Si $-a<2$, alors $-a \notin f([-1,+\infty[)$ et $-a \in f(]-\infty,-1[)$, donc d'après la question précédente, l'équation $f(x)=-a$ admet une unique solution réelle, qui appartient à $]-\infty,-1[$.

Dans tous les cas, l'équation $x^3-3x-a=0$ possède une unique solution réelle.

7. (a) On montre que $A_a^3-3A_a+aI_3=0$.

(b) Comme $-a+3\lambda=\lambda^3$, on a :

$$A_aX=\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^2\\ -a+3\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^2\\ \lambda^3\end{pmatrix}=\lambda X.$$

(c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On montre l'équivalence par double implication :

$\Rightarrow$ Supposons que λ est valeur propre de A_a. D'après la question 7.(a), X^3-3X+a est un polynôme annulateur de A_a. Donc $\lambda^3-3\lambda+a=0$ (car les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs).

$\Leftarrow$ Supposons que $\lambda^3-3\lambda+a=0$. Alors d'après la question précédente, en posant $X=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}$, on a $X\neq 0$ et $A_aX=\lambda X$, donc λ est valeur propre de A_a (et X est un vecteur propre associé).

8. (a) D'après la question 7.(c), λ est valeur propre de $A_2 \Leftrightarrow \lambda^3-3\lambda+2=0$.
On remarque que 1 est une racine évidente du polynôme x^3-3x+2. On factorise (par identification ou par division euclidienne) :

$$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2).$$

Donc $Sp(A_2)=\{-2,1\}$. On détermine les sous-espaces propres associés. Après calculs, on obtient :

- $E_{-2}(A_2)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(A_2)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice.

- $E_1(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A_2)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice.

(b) Par concaténation des bases des sous-espaces propres $E_{-2}(A_2)$ et $E_1(A_2)$ (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ce n'est pas une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est de cardinale 2 et $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$. On ne peut donc pas trouver de base de vecteurs propres de A_2 et cette matrice n'est donc pas diagonalisable.

9. D'après la question 6.(b), l'équation $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$ possède une unique solution α réelle. Autrement dit, d'après la question 7.(c), A_a possède une unique valeur propre α. Montrons par l'absurde que A_a n'est pas diagonalisable.

   On suppose A_a diagonalisable. Alors, puisque $Sp(A_a) = \{\alpha\}$, il existe une matrice inversible P d'ordre 3 telle que :

$$A = P\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}P^{-1} = P\alpha I_3 P^{-1} = \alpha P I_3 P^{-1} = \alpha I_3.$$

   Ceci est absurde donc A_a n'est pas diagonalisable.

10. (a) D'après la question 6.(a), la matrice A_a carrée d'ordre 3 possède 3 valeurs propres distinctes α, β, γ.

    D'après la question 7.(b), $\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \alpha^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à α, $\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \beta^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à β et $\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ \gamma^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à γ.

    Par concaténation de familles libres (un vecteur non nul à chaque fois) des sous-espaces propres $E_\alpha(A_2)$, $E_\beta(A_2)$ et $E_\gamma(A_2)$ (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \alpha^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \beta^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ \gamma^2\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme le cardinal de cette famille libre est égale à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_a. Donc A_a est diagonalisable.

    (b) Les colonnes de P forme une base (de vecteurs propres de A_a) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Elles sont donc linéairement indépendantes et P est inversible.
    On sait de plus d'après le cours que $A_a = PDP^{-1}$.

11. (a) y est solution de $(\mathscr{E}_0)$ si et seulement si y' est solution de $z'' - 3z = 0$.
    L'équation caractéristique de cette équation, $r^2 - 3 = 0$, a deux solutions $r_1 = -\sqrt{3}$ et $r_2 = \sqrt{3}$.
    Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E}_0)$ s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = \lambda e^{-\sqrt{3}x} + \mu e^{\sqrt{3}x}.$$

    (b) Les solution de $(\mathscr{E}_0)$ sont donc les primitives des fonctions de la forme obtenue à la question précédentes, c'est-à-dire les fonctions définies par une expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\frac{\lambda}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\mu}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} + \nu,$$

où λ, μ, ν sont des réels. Or $-\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\mu}{\sqrt{3}}$ décrivent l'ensemble des réels lorsque λ et μ décrivent l'ensemble des réels. Ainsi, les solution de $(\mathscr{E}_0)$ sont les fonctions vérifiant une relation de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-\sqrt{3}x} + \mu e^{\sqrt{3}x} + \nu,$$

où λ, μ, ν sont des réels.

12. Soit a un réel.

$$Y' = A_a Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -ay + 3y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow y''' = -ay + 3y' \Leftrightarrow y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a).$$

13. (a) Comme $A_a = PDP^{-1}$ (question 10.(b)), on a donc avec la question précédente :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a) &\Leftrightarrow Y' = A_a Y \\ &\Leftrightarrow Y' = PDP^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y) \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &\Leftrightarrow Z' = DZ. \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, en notant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a) &\Leftrightarrow Z' = DZ \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = \alpha z_1 \\ z_2' = \beta z_2 \\ z_3' = \gamma z_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} \\ z_2(x) = \lambda_2 e^{\beta x} \\ z_3(x) = \lambda_3 e^{\gamma x} \end{cases} \end{aligned}$$

Or $Y = PZ = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + z_3 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha^2 z_1 + \beta^2 z_2 + \gamma^2 z_3 \end{pmatrix}$ donc y est solution de $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement s'il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_3 e^{\gamma x} \\ \lambda_1 \alpha e^{\alpha x} + \lambda_2 \beta e^{\beta x} + \lambda_3 \gamma e^{\gamma x} \\ \lambda_1 \alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda_2 \beta^2 e^{\beta x} + \lambda_3 \gamma^2 e^{\gamma x} \end{pmatrix}$$

Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement s'il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_3 e^{\gamma x}$.

(c) Dans le cas $a = 0$, les valeurs propres de A_0 sont les solutions de l'équation $x^3 - 3x = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{3}$ et $\gamma = 0$. D'après la question précédente, les solutions de $(\mathscr{E}_0)$ sont donc les fonctions définies par l'expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^{-\sqrt{3}x} + \lambda_2 e^{\sqrt{3}x} + \lambda_3.$$

On retrouve bien le résultat de la question 11.(b).

Exercice 3 (ECRICOME 2023)

1. Le premier tirage se fait dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher et chaque numéro est alors équiprobable; on a reconnu la loi uniforme

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).$$

En particulier, les formules du cours donnent directement $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

2. Dans le *pire* des cas, on pioche lors du premier tirage la boule numérotée 1 et il n'y a dans la deuxième urne qu'une boule numérotée 1. Si on pioche au premier coup la boule numérotée n, il y a ensuite des boules numérotées de 1 à n dans la deuxième urne. Ainsi, la valeur de la deuxième boule piochée est toujours une valeur entre 1 et n et toutes les valeurs sont possibles. On a donc $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

(a) On suppose que l'évènement $[X = k]$ est réalisé.
D'après la description de l'expérience, on a disposé dans la deuxième urne un nombre de boules égal à

$$1 + 2 + ... + k = \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

(b) Si $j \in [\![1, k]\!]$, il y a dans l'urne des boules numérotées j (et il y en a exactement j). Sinon, les boules j ne font pas partie de l'urne (et la probabilité de les piocher alors nulle). On a donc par équiprobabilité et avec la formule ci-dessus pour le total de boules :

$$P_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2j}{k(k+1)}, & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \\ 0, & \text{si } k < j \end{cases}$$

4. (a) Commençons par mettre au même dénominateur.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

Par identification des numérateurs, on obtient :

$$\begin{cases} a + b & = & 0 \\ a & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = & -1 \\ a & = & 1 \end{cases}$$

On peut alors écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Avec le SCE $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X=k)\cap(Y=j)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=j)) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j) \quad \text{(probs composées)}\\
&= \sum_{k=1}^{j-1} P(X=k)\underbrace{P_{(X=k)}(Y=j)}_{=0} + \sum_{k=j}^{n} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j)\\
&= \sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)}\times\frac{1}{n} = \frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

5. Y est à support fini, elle admet donc une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j) = \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= (n+1) - \frac{2n+1}{3}\\
&= \frac{n+2}{3}.
\end{aligned}$$

6. Soit $n \geq 2$. Pour tout couple $(k,j) \in [\![1,n]\!]^2$, tel que $j > k$,

$$P((X=k)\cap(Y=j)) = 0 \neq P(X=k)\times P(Y=j).$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes. Pour $n=1$, les deux variables aléatoires X et Y sont certaines et égales à 1... elles sont donc indépendantes.

7. (a) Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k]\cap[Y=j]) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k])P_{[X=k]}([Y=j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{18}\left(2(2n+1)+3\right) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.
\end{aligned}$$

(b) Par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \\
&= \frac{n+1}{18}\left(4n+5-3(n+2)\right) \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}.
\end{aligned}$$

On remarque que, pour $n=1$, la covariance est nulle, ce qui est cohérent avec ce qu'on a mentionné ci-avant quant à l'indépendance de X et Y.

8. (a) Il suffit d'utiliser l'instruction `append` pour compléter la liste avec deux boucles `for`.

```python
def seconde_urne(k):
    L=[ ]
    for j in range(1, k+1) :
        for i in range(j):
            L.append(j)
    return L
```

(b) La variable X se simule grâce à la commande `rd.randint(1, n+1)`. On crée l'urne 2 à l'aide de la valeur de X. On prend ensuite le terme de la liste `urne2` à la position i (où i est choisi aléatoirement uniformément parmi le nombre de boules disponibles) pour Y. Ceci donne

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n) :
    X = rd.randint(1, n+1)
    urne2=seconde_urne(X)
    nb=len(urne2) # nombre de boules dans l'urne 2
    i=rd.randint(0, nb)
    Y=urne2[i]
    return X,Y
```

(c) Le programme proposé est le suivant

```python
def fonction(n):
    liste=[0]*n
    for i in range(10000):
        j = simul_XY[1]
        liste[j-1]=liste[j-1]+1/10000
    return liste
```

La variable `liste` contient la liste des fréquences de chaque valeur prise par Y lors de 10000 simulations de celle-ci, c'est-à-dire qu'on *estime* la loi de Y (les fréquences observées donnent des valeurs approchées des valeurs théoriques $P(Y = j)$).

On commence, avec la commande `liste=[0]*n` par créer une liste de n zéros qui va être actualisé. Le $j-$ième terme de la liste (indexé en Python par $j-1$) contient la fréquence de passage par la valeur j.

En effet, la commande `j = simul_XY[1]` simule Y (c'est la deuxième composante du couple (X, Y) car on indexe en commençant par 0...) et les composantes de `liste` sont les fréquences qui augmente de 1 divisé par l'effectif total dès lors que Y a pris la valeur de la composante en question.

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$.

(a) Le point moyen a pour coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent respectivement les moyennes des 20 valeurs obtenues par les simulations de X et de Y. Lorsque n devient grand, la *loi faible des grands nombres* permet d'affirmer que la moyenne empirique d'un $n-$échantillon fournit une bonne estimation de l'espérance. Donc le point moyen devrait avoir des coordonnées

$$\overline{x} \simeq E(X) = \frac{21}{2} = 10,5, \qquad \text{et } \overline{y} \simeq E(Y) = \frac{22}{3} \simeq 7,33.$$

(b) Les valeurs prises par X et Y sont entre 1 et 20: on peut éliminer la figure 1 (le nuage de points ne correspond pas). La covariance de X et Y est positive, la droite de régression est donc croissante. On peut éliminer la 4. La droite de régression passe par le point moyen, donc elle doit passer par $(10,5; 7,33)$. On peut donc éliminer les figures 2 et 4 où c'est la droite de régression qui ne correspond pas.

C'est donc la figure 3 qui correspond au nuage de points étudié.
