Correction - DS 8 (A)

Devoir surveillé du Lundi 24 Février

Exercice 1 (ECRICOME 2006)

1. Montrons tout d'abord la linéarité de f. Soient $P_1, P_2 \in E$ et λ un réel. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2)(x) &= (x-1)(\lambda P_1 + P_2)'(x) + (\lambda P_1 + P_2)(x) \\ &= (x-1)\lambda P_1'(x) + (1-x)P_2'(x) + \lambda P_1(x) + P_2(x) \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

Donc $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1)(x) + f(P_2)(x)$.

Montrons que f est à valeurs dans E. Soit $P \in E$ tel que $P(x) = a + bx + cx^2$ Alors $f(P)$ est définie par :

$$f(P)(x) = (x-1)(b+2cx) + a + bx + cx^2 = a - b + (2b - 2c)x + 3cx^2.$$

Donc $f(P)$ est un polynôme de E.

Finalement, f est l'endomorphisme de E.

2. On calcule les images des vecteurs de la base canonique. En utilisant le calcul ci-dessus :

- $f(P_0)(x) = 1 = P(x)$ donc $f(P_0) = P_0$.
- $f(P_1)(x) = 2x - 1 = 2P_1(x) - P_0(x)$ donc $f(P_1) = 2P_1 - P_0$.
- $f(P_2)(x) = 3x^2 - 2x = 3P_2(x) - 2P_1(x)$ donc $f(P_2) = 3P_2 - 2P_1$.

Donc la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. A est inversible car elle est triangulaire supérieure et ses coefficients sont tous non nuls. Donc f est bijective et c'est donc un automorphisme de E.

4. Toujours en utilisant le calcul de la question 1., on a :

$$\begin{aligned} f(R_0)(x) &= 1 = R_0(x), \\ f(R_1)(x) &= -2 + 2x = 2(x-1) = 2R_1(x), \\ f(R_2)(x) &= 3 - 6x + 3x^2 = 3(x-1)^2 = 3R_2(x). \end{aligned}$$

Donc $f(R_0) = R_0$, $f(R_1) = 2R_1$ et $f(R_2) = 3R_2$.

5. La famille $\mathcal{B}'$ est libre car c'est une famille de polynômes étagés en degré ($\deg(R_0) = 0$, $\deg(R_1) = 1$ et $\deg(R_2) = 2$). De plus, $\text{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E)$. Donc $\mathcal{B}'$ est une base de E.

6. Par définition, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Pour tout réel x, on a :

$$R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = x(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = x^2 = P_2(x),$$

et

$$R_1(x) + R_0(x) = (x-1) + 1 = P_1(x).$$

Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ est

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier rapidement que $P^{-1}P = I_3$.

8. Avec la formule de changement de bases,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \quad \text{donc} \quad A = PDP^{-1}.$$

Par passage à l'inverse, $A^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$.

Ini. $P\left[D^{-1}\right]^0 P^{-1} = I_3 = A^0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

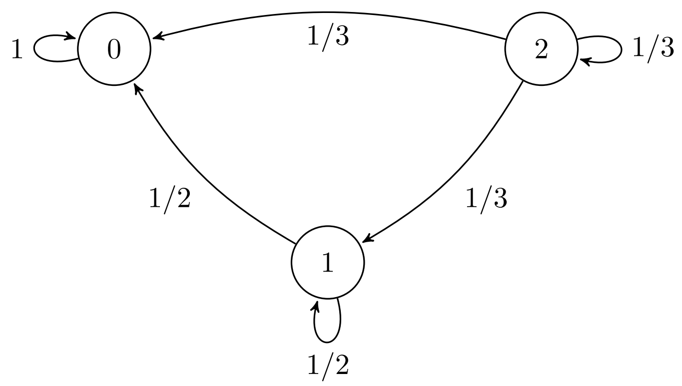
$$\left[A^{-1}\right]^{n+1} = A\left[A^{-1}\right]^n \underset{\mathcal{P}(n)}{=} PDP^{-1}P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1} = P\left[D^{-1}\right]^{n+1} P^{-1}.$$

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$.

On a alors (comme D est diagonale) :

$$\begin{aligned} \left[A^{-1}\right]^n &= P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-(1/2)^n & 1-2(1/2)^n+(1/3)^n \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. Voici le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$:



La matrice de transition B associée à la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = {}^t(A^{-1}).$$

10. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,2]\!])$ et, d'après le cours, $E(X_1) = \dfrac{0+2}{2} = 1$ et $V(X_1) = \dfrac{(2-0+1)^2-1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

11. Les valeurs possibles de X_2 sont $\{0,1,2\}$. Avec le SCE $(X_1 = i)_{0\leq i\leq 2}$, on a (par incompatibilité à la deuxième ligne, avec la formule des probabilités composées à la troisième) :

$$\begin{aligned}
P(X_2=0) &= P((X_1=0)\cap(X_2=0)\cup(X_1=1)\cap(X_2=0)\cup(X_1=2)\cap(X_2=0)) \\
&= P((X_1=0)\cap(X_2=0)) + P((X_1=1)\cap(X_2=0)) + P((X_1=2)\cap(X_2=0)) \\
&= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=0) + P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=0) \\
&\quad + P(X_1=2)P_{(X_1=2)}(X_2=0) \\
&= \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{11}{18}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
P(X_2=1) &= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=1) + P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=1) \\
&\quad + P(X_1=2)P_{(X_1=2)}(X_2=1) \\
&= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Enfin, toujours avec le même raisonnement,

$$\begin{aligned}
P(X_2=2) &= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=2) + P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=2) \\
&\quad + P(X_1=2)P_{(X_1=2)}(X_2=2) \\
&= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Comme X_2 est à support fini, elle admet une espérance et une variance.

$$E(X_2) = 0\times\frac{11}{18} + 1\times\frac{5}{18} + 2\times\frac{1}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Avec le théorème de transfert,

$$E(X_2^2) = 0^2\times\frac{11}{18} + 1^2\times\frac{5}{18} + 2^2\times\frac{1}{9} = \frac{13}{18}.$$

Avec Koenig-Huygens,

$$V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{13}{18} - \frac{1}{4} = \frac{17}{36}.$$

12. Toujours avec la formule des probabilités totales obtenue à la question précédentes avec le SCE $(X_k = i)_{0\leq i\leq 2}$:

$$\begin{aligned}
P(X_{k+1}=0) &= P(X_k=0)P_{(X_k=0)}(X_{k+1}=0) + P(X_k=1)P_{(X_k=1)}(X_{k+1}=0) \\
&\quad + P(X_k=2)P_{(X_k=2)}(X_{k+1}=0) \\
&= 1\times P(X_k=0) + \frac{1}{2}\times P(X_k=1) + \frac{1}{3}\times P(X_k=2).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
P(X_{k+1}=1) &= P(X_k=0)P_{(X_k=0)}(X_{k+1}=1) + P(X_k=1)P_{(X_k=1)}(X_{k+1}=1) \\
&\quad + P(X_k=2)P_{(X_k=2)}(X_{k+1}=1) \\
&= 0\times P(X_k=0) + \frac{1}{2}\times P(X_k=1) + \frac{1}{3}\times P(X_k=2),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}=2) &= P(X_k=0)P_{(X_k=0)}(X_{k+1}=2)+P(X_k=1)P_{(X_k=1)}(X_{k+1}=2) \\ &\quad +P(X_k=2)P_{(X_k=2)}(X_{k+1}=2) \\ &= 0\times P(X_k=0)+0\times P(X_k=1)+\frac{1}{3}\times P(X_k=2). \end{aligned}$$

On a donc

$$U_{k+1}=U_k\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}=U_kB.$$

13. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: $U_k=U_0B^k$.

Ini. $U_0B^0=U_0\times I_3=U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$U_{k+1}\underset{\text{Q12}}{=}U_kB\underset{\mathcal{P}(k)}{=}U_0B^kB=U_0B^{k+1}.$$

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $U_k=U_0B^k$.

14. Comme $U_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le produit $U_k=U_0\left[{}^t\left(A^{-1}\right)\right]^k$ donne la troisième ligne de ${}^t\left(A^{-1}\right)^k$ donc avec la question 8,

$$\begin{aligned} P\left(X_k=0\right) &= 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{3^n}\underset{n\to+\infty}{\to}1 \\ P\left(X_k=1\right) &= \frac{2}{2^n}-\frac{2}{3^n}\underset{n\to+\infty}{\to}0 \\ P\left(X_k=2\right) &= \frac{1}{3^n}\underset{n\to+\infty}{\to}0 \end{aligned}$$

15. Voici le programme `Python` demandé :

```python
def simulX(k):
    X = 2
    for i in range(k):
        X = rd.randint(0, X+1)
    return(X)
```

16. La variable `S` contient 10000 simulations de X_{100} à la fin de la boucle `for` .

La commande `S.count(j)` compte le nombre de fois où X_{100} a pris la valeur $j\in[\![0,2]\!]$. En divisant par 10000, on obtient la fréquence f_j associée. Donc `L` contient la loi empirique de X_{100}.

Comme le nombre de simulations est grand, f_j est une bonne estimation de la probabilité $P(X_{100}=j)$ donc `L` contient des estimations des probabilités $P(X_{100}=0)$, $P(X_{100}=1)$ et $P(X_{100}=2)$. D'après la question 14, comme $k=100$ est grand, on devrait obtenir $L\simeq[1,0,0]$.

Exercice 2 (ECRICOME 2005)

1. Pour I_0 :

$$I_0=\int_0^1\varphi_0\left(x\right)\,dx=\int_0^1 e^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}.$$

Pour I_1 :

$$I_1=\int_0^1\varphi_1\left(x\right)\,dx=\int_0^1\left(1-x\right)e^{-2x}dx$$

En intégrant par parties avec $u(x) = (1-x)$, $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$, on a :

$$I_1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x) \leq 1 \Rightarrow (1-x)^n \geq (1-x)^{n+1} \Rightarrow (1-x)^n e^{-2x} \geq (1-x)^{n+1}e^{-2x}.$$

Donc $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes),

$$\int_0^1 \varphi_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite (I_n) est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours par construction :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n e^{-2x} \leq e^{-2x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_n(x) \geq 0$. En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a $I_n \geq 0$.

4. La suite (I_n) étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$ (théorème des suites monotones).

5. La fonction $g(x) = e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in [0,1]$, on a $g(x) \leq g(0) = 1$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait déjà d'après la question 3 que $I_n \geq 0$. Toujours par construction, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$e^{-2x} \leq 1 \Rightarrow (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n.$$

En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \leq \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

7. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

8. On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x}dx$.

On pose $u(x) = (1-x)^{n+1}$, $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$, $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2}(1-x)^n e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[1-(n+1)I_n\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n.$$

9. Avec les deux questions précédentes, on a :

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n \Rightarrow nI_n + I_n = 1 - 2I_{n+1} \Rightarrow nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, I_n = 1$.

10. Toujours avec la question 8, on a :

$$\begin{aligned} nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n \quad &\Rightarrow \quad n\,(nI_n - 1) = -2n\, I_{n+1} - n\, I_n \\ &\Rightarrow \quad n\,(nI_n - 1) = -2\frac{n}{n+1}\,(n+1)\, I_{n+1} - n\, I_n \\ &\Rightarrow \quad n\,(nI_n - 1) = -2\frac{1}{1+1/n}\,(n+1)\, I_{n+1} - n\, I_n. \end{aligned}$$

Or avec la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, I_n = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, I_{n+1} = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(nI_n - 1) = -3$.

11. Avec la question précédente, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(nI_n - 1) = -3$.

Posons $\varepsilon(n) = n\,(nI_n - 1) + 3$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) = n\,(nI_n - 1) + 3 \quad &\Rightarrow \quad n\,(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon(n) \\ &\Rightarrow \quad nI_n - 1 = -\frac{3}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \\ &\Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien l'existence de trois réels $a = 0$, $b = 1$, $c = -3$ et d'une quantité $\varepsilon(n)$ tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\,(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Exercice 3 (ECRICOME 2019)

1. Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. Montrons que $f(-t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère plusieurs cas :

   - Si $t \geq 1$, alors $-t \leq -1$ et dans ce cas

   $$f(-t) = -\frac{-1}{(-t)^3} = \frac{-1}{-t^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$

   - Si $t \leq -1, -t \geq 1$ et on a

   $$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{-t^3} = \frac{-1}{t^3} = f(t).$$

   - Enfin, si $-1 < t < 1$ alors $-1 < -t < 1$ et

   $$f(-t) = 0 = f(t).$$

   Dans tous les cas, on a bien $f(-t) = f(t)$. Ainsi, f est bien paire.

2. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On a :

$$\int_1^A f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. (a) On utilise le changement de variable $u = -t$ (qui est $\mathscr{C}^1$). Comme dans ce cas $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, il suit (comme $f(-u) = f(u)$ par parité) que

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{A}^{1} f(-u)\mathrm{d}u = \int_{1}^{A} f(u)\mathrm{d}u.$$

Faisant tendre A vers $+\infty$ et utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut également $\dfrac{1}{2}$.

(b) On vérifie que f satisfait aux critères d'une densité de probabilité :

- f est bien positive partout sur $\mathbb{R}$: c'est clair sur $]-1;1[$ (elle est nulle) et sur $[1;+\infty[$. Si $t \in]-\infty;-1]$, $t^3 \leq -1$ et donc $-1/t^3 \geq 0$.
- f est continue sauf peut-être en -1 et en 1.
- Enfin, avec les questions précédentes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

4. (a) Par définition de la fonction de répartition de X, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. Ainsi,

- Si $x \leq -1$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{-1}{t^3}\right)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} -\int_{-A}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{-A}^{x} = \frac{1}{2x^2}.$$

- Si $x \in]-1;1[$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + 0 = \frac{1}{2}.$$

- Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

On a bien le résultat attendu.

(b) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge (la convergence absolue étant équivalente à la convergence ici). Or :

$$\int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

On reconnait une intégrale de Riemann convergente. Donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge et comme $t \mapsto tf(t)$ est impaire (car f est paire), on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge. Donc X admet une espérance et on a (avec le même raisonnement qu'à la question 3.(a)) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

(c) X admet une variance si et seulement elle admet un moment d'ordre 2 ce qui, avec les mêmes arguments que ci-dessus, est équivalent à la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

qui est cette fois une intégrale de Riemann divergente. Donc X n'admet pas de variance.

5. (a) Commençons par observer que $|X|(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 1$. Pour $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = P(-x < X \leq x) \quad \text{(car } X \text{ est à densité)} \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq -x) = F_X(x) - F_X(-x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) - \left(\frac{1}{2(-x)^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Au final, on obtient

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_Y de Y est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Elle est aussi continue en 1 ($\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 0$).

Ainsi, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 1. On peut donc conclure que Y est à densité.

(b) Une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y là où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire en 1. On a bien

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

(c) Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\mathrm{d}t$ converge (la convergence absolue étant équivalente à la convergence ici). Comme f_Y est nulle en dehors de $[1; +\infty[$, il suffit de justifier la convergence et de calculer l'intégrale entre 1 et $+\infty$.

Soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A t f_Y(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = 2$.

6. (a) Si $D = -1$ alors $Z = 0$, si $T = 1$, alors $Z = 1$. Donc $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus, $P(Z = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Donc Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Comme $D = 2Z - 1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent

$$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0, \qquad V(D) = 2^2 V(Z) = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

(b) Comme D et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant chacune une espérance, leur produit admet également une espérance, égale au produit des espérances.

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE $\{(D = -1), (D - 1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P((T \leq x) \cap (D = -1)) + P((T \leq x) \cap (D = 1)) \\ &= P((-Y \leq x) \cap (D = -1)) + P((Y \leq x) \cap (D = 1)) \\ &= P(Y \geq -x)P(D = -1) + P(Y \leq x)P(D = 1) \quad \text{(par indép. de } D \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \geq -x) + \frac{1}{2}P(Y \leq x). \end{aligned}$$

(d) Avec la question précédente et en utilisant que Y est à densité à la deuxième égalité :

$$F_T(x) = P(T \leq x) = \frac{1}{2}(1 - P(Y < -x) + P(Y \leq x) = \frac{1}{2}\left(1 - F_Y(-x) + F_Y(x)\right).$$

En injectant la formule pour la fonction de répartition obtenue dans la partie précédente, on trouve

$$F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On remarque que T suit la même loi que X.

7. (a) On rappelle que, d'après le cours

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) $U(\Omega) =]0,1[$ donc $(\sqrt{1-U})(\Omega) =]0,1[$ donc $V(\Omega) =]1, +\infty[$. Ainsi, $F_V(x) = 0$ si $x \leq 1$. Pour $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= P\left(1 - U \geq \frac{1}{x^2}\right) \quad \left(\text{par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\right) \\ &= P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{en utilisant que } U \text{ est à densité}) \\ &= F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \left(\text{car } x > 1 \text{ donc } 1 - \frac{1}{x^2} \in]0,1[\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et on reconnait la fonction de répartition de Y. Ainsi, V et Y suivent la même loi.

8. (a) Voici le programme demandé :

```python
def D(n):
    a = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        if rd.random()<1/2:
            a[k] = -1
        else:
            a[k] = 1
    return(a)
```

(b) Le programme proposé semble vouloir calculer la moyenne empirique d'un $n-$échantillon de T obtenu en simulant D avec la fonction précédente et Y par inversion avec la variable V et la loi uniforme. Pour n assez grand, la moyenne empirique est une bonne approximation de l'espérance. On s'attend donc à une approximation de celle-ci, c'est-à-dire à une valeur proche de 0.