Correction - DS 8 (B)

Devoir surveillé du Lundi 24 Février

Exercice 1 (EDHEC 2017)

1. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+Q)(x) &= \int_0^1 (\lambda P+Q)(x+t)dt \\
&= \int_0^1 (\lambda P(x+t)+Q(x+t))dt \quad \text{(par linéarité de l'évaluation)} \\
&= \lambda \int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \lambda\varphi(P)(x)+\varphi(Q)(x)
\end{aligned}$$

On a donc bien $\varphi(\lambda P+Q)=\varphi(P)+\varphi(Q)$ et φ est linéaire.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(e_0)(x) &= \int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1 \\
\varphi(e_1)(x) &= \int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \int_0^1 xdt + \int_0^1 tdt \\
&= \Big[x.t\Big]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x+\frac{1}{2} \\
\varphi(e_2)(x) &= \int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2dt = \int_0^1 (x^2+2xt+t^2)dt \\
&= \left[x^2.t+x.t^2+\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = x^2+x+\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\varphi(e_0)=e_0$, $\varphi(e_1)=\frac{1}{2}e_0+e_1$ et $\varphi(e_2)=\frac{1}{3}e_0+e_1+e_2$.

(c) Montrons que φ est à valeurs dans E. Soit $P=\alpha e_0+\beta e_1+\gamma e_2$ un polynôme de E. La linéarité de φ montre que :

$$\varphi(P)=\alpha\varphi(e_0)+\beta\varphi(e_1)+\gamma\varphi(e_2).$$

Or, comme on l'a vu au 1.(b) :

$$\varphi(e_0)=e_0\in E,\ \varphi(e_1)=\frac{1}{2}e_0+e_1\in E \text{ et } \varphi(e_2)=\frac{1}{3}e_0+e_1+e_2\in E.$$

Comme E est stable par combinaison linéaire, $\varphi(P)\in E$.
φ est linéaire et à valeurs dans E, donc φ est un endomorphisme de E.

2. (a) D'après les résultats du 1.(b), la matrice A de φ dans la base (e_0,e_1,e_2) est :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A de φ dans la base (e_0,e_1,e_2) est triangulaire avec 3 pivots non nuls, elle est donc inversible et φ est bijectif. φ est un automorphisme de E (endomorphisme bijectif de E).

(c) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Donc A admet 1 comme unique valeur propre et $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.
Raisonnons par l'absurde : si A était diagonalisable, puisque 1 est la seule valeur propre de A, il existerait une matrice P inversible telle que $A = PIP^{-1}$, ce qui impliquerait que $A = I$. Ceci est absurde, donc A n'est pas diagonalisable.

3. Les commandes `Python` suivantes affichent la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```python
n = input('entrer une valeur pour n:')
A = np.array([[1,1/2,1/3], [0,1,1], [0,0,1]])
print(al.matrix_power(A,n))
```

4. (a) Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: il existe un réel u_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ini. $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \underset{\mathcal{P}(n)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$.

(b) Puisque $u_0 = 0$, on a :

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Or $(u_{k+1} - u_k) = \dfrac{1}{6}(3k+2)$, donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}(3k+2) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}(3k) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1} 2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{3} = n\left(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{4}\right) = \frac{n(3n+1)}{12}. \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (EDHEC 2024)

1. (a) Soit $x \in [0,1]$, et a, b les réels vérifiant l'égalité de l'énoncé. On a :

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x)+b(2-x)}{4-x^2} = \frac{2(a+b)+(a-b)x}{4-x^2}.$$

Par identification des coefficients, on a $a-b=0$ et $2(a+b)=1$.

On vérifie qu'on a alors $a=b=\frac{1}{4}$.

(b) En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4(2-x)}dx + \int_0^1 \frac{1}{4(2+x)}dx \\ &= \frac{1}{4}\left([-\ln(2-x)]_0^1 + [\ln(2+x)]_0^1\right) \\ &= \frac{\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)}{4} \\ &= \frac{\ln(3)}{4}. \end{aligned}$$

2. Pour calculer u_1, il suffit de remarquer qu'une primitive de $\frac{x}{4-x^2}$ est la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto -\frac{\ln(4-x^2)}{2}$. On a donc :

$$u_1 = \left[-\frac{\ln(4-x^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{-\ln(3)+\ln(4)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

3. (a) Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned} 4u_n - u_{n+2} &= \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}dx = \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a pour tout entier n : $u_{n+2} = 4u_n - \frac{1}{n+1}$.
Le programme calcule les termes de u_n par récurrence en incrémentant n de 2 à chaque étape.
Si n est pair, on calcule u_n en utilisant la formule de récurrence et en partant de u_0. Si n est impair, on fait de même en partant de u_1.

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2, n+1, 2) :
```

```
            u = 4*u-1/(k-1)
    else :
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3, n+1, 2) :
            u = 4*u-1/(k-1)
    return u
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a (à faire par construction) :

$$3 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

Par décroissance de la fonction inverse puis en multipliant par $x^n \in [0,1]$, on obtient :

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}.$$

Par positivité de l'intégrale, on a donc :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}.$$

(b) La suite (u_n) est encadrée par les suites $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers 0. D'après le théorème d'encadrement, on conclut que la suite (u_n) converge aussi vers 0.

(c) D'après la question 4.(a), la suite (u_n) est minorée par la suite $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

De plus, $\frac{1}{4(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n}$ qui est le terme général d'une série divergente.
Par comparaison de séries à terme positifs, on en déduit que $\sum \frac{1}{4(n+1)}$ puis $\sum u_n$ divergent.

5. (a) Ce programme affiche les points de coordonnées $(n, 3nu_n)$ pour n allant de 0 à 40. On voit que l'ordonnée des points s'approche de 1 et on conjecture donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3nu_n = 1$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.

(b) Soit f et g les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et leurs dérivées sont données par :

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = x^n.$$

D'après la formule d'intégration par partie, on a alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)}\right]_0^1 - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \\
&= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx.
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En procédant de la même matière qu'à la question 4.(a), on peut montrer que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx.$$

On a alors :

$$\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ est encadrée par des termes qui convergent vers 0, on peut conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0$$

(d) On a :

$$3nu_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx.$$

- Le terme $\dfrac{3n}{3(n+1)}$ converge vers 1.
- Le terme $\dfrac{6n}{(n+1)}$ converge vers 6 donc par produit et d'après la question précédente, le terme $\dfrac{6n}{(n+1)} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}$ converge vers 0.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 3nu_n = 1$ et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$ conformément à la conjecture de la question 5.(a).

Exercice 3 (EDHEC 2010)

1. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus :

$$\forall x \in]-1,1[, \ (-x) \in]-,1,1[\quad \text{et} \quad f(-x) = 0 = f(x)$$

$$\forall x \notin]-1;1[, \ (-x) \notin]-1,1[\quad \text{et} \quad f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2} = \frac{1}{2x^2} = f(x)$$

On en déduit que la fonction f est paire.

(b) f est positive sur $\mathbb{R}$ (car un carré est positif et 0 est positif) et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en -1 et 1 par continuité des fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2}$ sur les intervalles où elles sont définies.

Étudions l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Comme f est paire, on se restreint à l'étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 0dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = 0 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx.$$

Soit $A \geq 1$. Alors :

$$\int_1^A \frac{1}{2x^2} dx = \left[-\frac{1}{2x} \right]_1^A = -\frac{1}{2A} + \frac{1}{2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi f est bien une densité de probabilité.

2. X admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge. Comme $x \mapsto xf(x)$ est impaire, cette intégrale converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge. Par relation de Chasles, on a :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 0dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx.$$
Soit $A \geq 1$. Alors :
$$\int_1^A \frac{1}{2x}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]_1^A = \frac{1}{2}\ln(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty.$$
Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ diverge et X n'admet pas d'espérance.

3. (a) Pour tout x réel, on a par croissance de l'exponentielle :
$$F_Y(x) = P(\ln(|X|) \leq x) = P(|X| \leq e^x) = P(-e^x \leq X \leq e^x).$$
Comme X est à densité, on obtient :
$$F_Y(x) = P(X \leq e^x) - P(X < -e^{-x}) = P(X \leq e^x) - P(X \leq -e^{-x}) = F_X(e^x) - F_X(-e^x).$$
(b) Comme X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (là où f n'est pas continue, c'est-à-dire en -1 et 1).
Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en x tel que $e^x = \pm 1$ et $-e^x = \pm 1$ (c'est-à-dire en $x = 0$ donc en un nombre fini de points). Donc Y est bien une variable à densité.
(c) Une densité f_Y de Y est alors donnée par $f_Y(x) = F_Y'(x)$ là où F_Y est de classe C^1 (on donne une valeur arbitraire positive ailleurs) :
$$f_Y(x) = F_X'(e^x)e^x + F_X'(-e^x)e^x = e^x\left[f(e^x) + f(-e^x)\right] = 2e^x f(e^x)$$
par parité de f.
(d) Déterminons cette fonction :
$$f(e^x) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } e^x \in [-1;1] \\ \dfrac{1}{2(e^x)^2} & \text{sinon} \end{array}\right.$$
et on résout avec l'exponentielle toujours positive et la fonction ln strictement croissante :
$$-1 \leq e^x \leq 1 \Longleftrightarrow e^x \leq 1 \Longleftrightarrow x \leq 0 \qquad \text{donc} \qquad e^x \notin [-1;1] \Longleftrightarrow x > 0$$
donc
$$f(e^x) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2e^{2x}} & \text{sinon} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad f_Y(x) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{array}\right.$$
On reconnaît bien la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.
Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $E(X) = V(X) = 1$.

4. (a) Si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0$ et $e^{-x} \leq 1$ (par croissance de exponentielle) donc $0 \leq 1 - e^{-x}$.
D'autre part, $1 - e^{-x} < 1$ est toujours vrai donc on a bien :
$$x \leq 0 \Longrightarrow 1 - e^{-x} \in [0, 1[.$$
Si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $e^{-x} > 1$ (par croissance de exponentielle) donc $1 - e^{-x} < 0$ et on a bien :
$$x < 0 \Longrightarrow 1 - e^{-x} < 0$$

(b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P(-\ln(1-U) \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -x) = P\left(1-U \geq e^{-x}\right) \\ &= P\left(U \leq 1-e^{-x}\right) = F_U(1-e^{-x}) \end{aligned}$$

par croissance de l'exponentielle à la quatrième égalité. Or :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Donc avec ce qui précède :

- Si $x < 0$, $1 - e^{-x} < 0$ donc $F_Z(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$ donc $F_Z(x) = 1 - e^{-x}$.

Finalement :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.
Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(c) Voici la fonction `simulY` demandée :

```python
def simulY():
    y = - np.log(1-rd.random())
    return(y)
```

Exercice 4 (EDHEC 2017)

1. On a $X_1(\Omega) = \{2,3,4\}$ et $\forall k \in \{2,3,4\} \quad P(X_1 = k) = \dfrac{1}{3}$ par équiprobabilité des déplacements.

   X_1 suit une loi uniforme sur $\{2,3,4\}$, on a donc $E(X_1) = \dfrac{2+4}{2} = 3$.

2. A priori, tous les points sont possibles à atteindre en n déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). Prouvons rigoureusement par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = \{1,2,3,4\}$.

   Ini. Pour $n = 2$, d'après le résultat admis, on a $X_2(\Omega) = \{1,2,3,4\}$. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

   Héré. Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, le mobile peut à n l'instant n être en $i \in \{1,2,3,4\}$. A l'instant $n+1$, il sera alors en $j \in \{1,2,3,4\} - \{i\}$. En envisageant deux valeurs distinctes de i, on obtient toutes les valeurs possibles dans $\{1,2,3,4\}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Ccl. Par le principe de récurrence, $X_n(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ pour tout $n \geq 2$.

3. (a) Pour $n \geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in [\![1,4]\!]}$. On a alors : puis avec la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{4} (X_n = i) \cap (X_{n+1} = 1)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4} P((X_n = i) \cap (X_{n+1} = 1)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{i=1}^{4} P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = 1) P(X_n = i) \quad \text{(formule des probas composées)} \end{aligned}$$

Or $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=i)=\dfrac{1}{3}$ si $i\neq 1$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right).$$

(b) Pour $n=0$,

$$P(X_1=1)=0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left(P(X_0=2)+P(X_0=3)+P(X_0=4)\right)=\frac{1}{3}\ (0+0=0)=0,$$

donc la relation est encore vraie.
Pour $n=1$,

$$P(X_2=1)=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left(P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

la relation est donc encore vraie pour $n=1$.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1$ car c'est vrai pour $n=0$ et $n=1$ et vraie aussi pour $n\geq 2$ car $(X_n=i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On a alors avec la question 3.(a) :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\left(1-P(X_n=1)\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(X_n=1)$$

ce qui est la relation cherchée.

(d) Posons $v_n=P(X_n=1)$. La suite (v_n) vérifie $v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=-\dfrac{1}{3}v_n+\dfrac{1}{3}$.
C'est une suite arithmético-géométrique. Cherchons le point fixe α :

$$\alpha=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\alpha=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{4}.$$

On a alors :

$$v_{n+1}-\alpha=\left(-\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}(v_n-\alpha).$$

On obtient une suite géométrique qu'on peut expliciter :

$$v_n-\alpha=\left(-\frac{1}{3}\right)^n(v_0-\alpha)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On a bien : $\forall n\in\mathbb{N},\ P(X_n=1)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) Pour $n\geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n=i)_{i\in[\![1,4]\!]}$, et en appliquant de nouveau la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}=2)=\sum_{i=1}^{4}P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2)P(X_n=i)$$

Or $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=i)=\dfrac{1}{3}$ si $i\neq 2$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right)$$

Pour $n=0$,

$$P(X_1=2)=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left(P(X_0=1)+P(X_0=3)+P(X_0=4)\right)=\frac{1}{3}\ (1+0=0)=0,$$

donc la relation est encore vraie.
Pour $n = 1$,

$$P(X_2 = 1) = \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\left(P(X_1 = 1) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$

la relation est donc encore vraie pour $n = 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right).$$

(b) Comme $(X_n = i)_{i \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements,

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(1 - P(X_n = 2)\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(X_n = 2).$$

(c) Posons $w_n = P(X_n = 2)$. La suite (v_n) vérifie $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = -\frac{1}{3}w_n + \frac{1}{3}$.
C'est une suite arithmético-géométrique. On a le même point fixe que pour v_n : $\alpha = \frac{1}{4}$.
On montre également que $(w_n - \alpha)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Donc :

$$w_n - \alpha = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (w_0 - \alpha) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{4}\right)) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. Les suites définies par $P(X_n = 3)$ et $P(X_n = 4)$ ont la même relation de récurrence que $P(X_n = 2)$ et la même valeur initiale 0. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = P(X_n = 2)$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. X_n est à support fini donc elle admet une espérance et on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) + 3P(X_n = 3) + 4P(X_n = 4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4}\right) \\ &= \frac{10}{4} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

On peut vérifier que ce résultat est encore valable avec $n = 0$ (on obtient bien $E(X_0) = 1$) et avec $n = 1$ (on obtient bien $E(X_1) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$).

7. (a) On utilise les 4 égalités obtenues aux questions 3.(a) et 4.(a) que l'on peut réécrire également pour $i = 3$ et $i = 4$.

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{3}\left(0.P(X_n = 1) + 1.P(X_n = 2) + 1.P(X_n = 3) + 1.P(X_n = 4)\right) \\ P(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2) + 1.P(X_n = 3) + 1.P(X_n = 4)\right) \\ P(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n = 1) + 1.P(X_n = 2) + 0.P(X_n = 3) + 1.P(X_n = 4)\right) \\ P(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n = 1) + 1.P(X_n = 2) + 1.P(X_n = 3) + 0.P(X_n = 4)\right) \end{cases}$$

Donc

$$U_nA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

On a bien : $U_{n+1} = U_n\ A$.

(b) Posons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $U_n = U_0\ A^n$.

Ini. Pour $n = 0$, $A^0 = I_4$ et $U_0A^n = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ aussi. Avec la question précédente puis l'hypothèse de récurrence :

$$U_{n+1} = U_nA = (U_0\ A^n) \times A = U_0(A^n \times A) = U_0A^{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0\ A^n$.

(c) Le produit $U_0 \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times A^n$ donne la première ligne de la matrice A^n, qui est égal à U_n, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

8. En multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient la deuxième ligne de A^n.

   Donc en choisissant comme position initiale au départ $X_0 = 2$, et en recommençant la même méthode probabiliste, on obtiendrait la deuxième ligne de A^n. Avec $X_0 = 3$, on obtiendrait la 3-ième ligne, et $X_0 = 4$, la 4-ième ligne.

9. On a :

$$aI + bJ = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ b & a+b & b & b & b \\ b & b & a+b & b \\ b & b & b & a+b \end{pmatrix}.$$

   Donc :

$$aI + bJ = A \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{1}{3}.$$

10. (a) On a $J^2 = 4J$. Notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété : $J^k = 4^{k-1}J$.

Ini. $4^{1-1}J = J$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Héré. Soit $k \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ aussi. A l'aide de l'hypothèse de récurrence,

$$J^{k+1} = J \times J^k = J \times \left(4^{k-1}J\right) = 4^{k-1}J^2 = 4^kJ.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $k \geq 1$, $J^k = 4^{k-1}J$.

(b) Comme les matrices I et J commutent, on a alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \left(\frac{1}{3}(J-I)\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (J-I)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k(-I)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^nI + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1}\right)J\right). \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k} = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k} - (-1)^n\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$$A^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left((-1)^n I + \frac{1}{4}\left(3^n-(-1)^n\right)J\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)J$$

(c) Pour $n=0$,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)J = I + \frac{1}{4}(1-1)J = I.$$

La formule est valable pour $n=0$.

11. (a) La fonction `deplacement` prend en entrée $i \in [\![1,4]\!]$.
Elle créé une liste `S` contenant les entiers de $[\![1,4]\!] \setminus \{i\}$, c'est-à-dire les sommets du carré que peut atteindre le mobile à l'instant suivant lorsqu'il est en i.
Elle prend un nombre aléatoire `r` entre 0 et 2.
Elle retourne enfin l'élément d'indice `r` de `S`, donc un élément aléatoire de $[\![1,4]\!] \setminus \{i\}$.
Cette fonction simule donc un déplacement du mobile lorsqu'il part du sommet i et retourne le sommet atteint à l'instant d'après.

(b) On complète sans problème :

```
x = np.zeros(100)
x[0] = 1
for k in range(1,100):
    x[k] = deplacement( x[k-1] )
n = np.sum( x==1 )
print(x, n)
```

(c) On peut constater que le nombre de passages en 1 est toujours proche de 25, c'est-à-dire une fois sur quatre lors des 100 premiers instants. Or la probabilité d'être en 1 se rapproche de $\frac{1}{4}$, comme le montre la formule de la question 3.(d). Les résultats affichés semblent donc logiques.