Correction - DS 8 (B)

Devoir surveillé du Mardi 20 Février

Exercice 1 (EDHEC 2004)

1. (a) Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q)(x) &= \left((x^2-x)(\lambda P+Q)(x)\right)'' = \left(\lambda(x^2-x)P(x)+(x^2-x)Q(x)\right)'' \\ &= \lambda\left((x^2-x)P(x)\right)'' + \left((x^2-x)Q(x)\right)'' = \lambda f(P)(x)+f(Q)(x). \end{aligned}$$

Donc $f(\lambda P+Q) = \lambda f(P)+f(Q)$ et f est linéaire.
Soit $P \in E$. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = ax^2+bx+c$. Alors :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= \left((x^2-x)(ax^2+bx+c)\right)'' = \left(ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2-cx\right)'' \\ &= 12ax^2+6(b-a)x+2(c-b). \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in E$ et f est bien un endomorphisme de E.

(b)
- Pour e_0 : On reprend le calcul précédent avec $a = b = 0$ et $c = 1$ et on obtient $f(e_0)(x) = 2 = 2e_0(x)$ donc $f(e_0) = 2e_0$.
- Pour e_1 : On reprend le calcul précédent avec $a = c = 0$ et $b = 1$ et on obtient $f(e_1)(x) = 6x-2 = 6e_1(x)-2e_0(x)$ donc $f(e_1) = 6e_1-2e_0$.
- Pour e_2 : On reprend le calcul précédent avec $b = c = 0$ et $a = 1$ et on obtient $f(e_2)(x) = 12x^2-6x = 12e_2(x)-6e_1(x)$ donc $f(e_2) = 12e_2-6e_1$.

(c) $f(e_0)$ a donc pour coordonnées $(2,0,0)$ dans $\mathcal{B}$ d'où la première colonne de A et de même pour les autres.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

(d) Comme la matrice A de f est triangulaire à termes diagonaux non nuls, elle est inversible. Donc f est bijective. Comme on a déjà démontré que f est un endomorphisme de E, f est donc un automorphisme de E.

2. (a) Comme la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux. Les valeurs propres de f sont donc 2, 6 et 12. Il reste à chercher les sous-espaces propres associés.

$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2y = 0 \\ 4y-6z = 0 \\ 10z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$(A-6I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4x-2y = 0 \\ -6z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 6 est $E_6(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$(A-12I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -10x-2y = 0 \\ -6y-6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -\frac{1}{5}y \end{cases}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 12 est $E_{12}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

(b) On a obtenu à la question précédente une base de chacun des sous-espaces propres de A (génératrice et libre car un vecteur non nul).

Par concaténation (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme card $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}\right) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc A est diagonalisable et avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

on a alors $A = P\,D\,P^{-1}$.

(c) Par récurrence :

Ini. $PD^0P^{-1} = I = A^0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^n A = P\,D^n\,P^{-1} P\,D\,P^{-1} = P\,D^n I\,D\,P^{-1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$.

Ccl. Pour tout entier naturel n, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

3. (a) Par le pivot de Gauss, on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Comme D est diagonale, on a donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\times 2^n & 5\times 2^n & 3\times 2^n \\ 0 & -5\times 6^n & -5\times 6^n \\ 0 & 0 & 2\times 12^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\times 2^n & 5\times 2^n - 5\times 6^n & 3\times 2^n - 5\times 6^n + 2\times 12^n \\ 0 & 10\times 6^n & 10\times 6^n - 10\times 12^n \\ 0 & 0 & 10\times 12^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) On pose $B = \frac{1}{12}A$. Donc $B^n = \left(\frac{1}{12}\right)^n A^n$.
Comme $\left(\frac{2}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{6}{12}\right)^n \to 0$ alors tous les coefficients de B^n tendront vers 0 sauf ceux en 12^n dans A.

Donc $B^n \to \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = J$ et $J^2 = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} = J$

Exercice 2 (EDHEC 2004)

1. (a) Le premier pile advient au plus tôt au premier tirage et au plus tard au n-ième lancer. Enfin, si l'on n'a pas de pile, $Z = 0$. Donc les valeurs possibles de Z sont : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(b) Si $k \neq 0$ (donc si $1 \leq k \leq n$), alors $(Z = k)$ signifie que l'on a le premier pile lors du k-ième lancer.

Donc $(Z = k) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$.

Les lancers étant indépendants, $P(Z = k) = P(F_1)\ P(F_2) \dots P(F_{k-1})\ P(P_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Si $k = 0$, alors $Z = 0$ signifie que l'on a pas eu de pile lors de ces n lancers.
Donc $(Z = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$.
Comme les lances sont indépendants, $P(Z = 0) = P(F_1) \dots P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Z = k)$ en mettant à part la valeur $k = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(Z=k) &= P(Z=0) + \sum_{k=1}^{n} P(Z=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.\end{aligned}$$

(d) Dans le programme, `k` est le compteur de lancers. On effectue des lancers jusqu'à ce que l'on ait pile `rd.random() < 1/2` ou que l'on ait effectué n lancers `(k <= n)`.
Si on n'obtient pas de pile, $k = n+1$ à la fin de la boucle et z vaut 0 (`z = 0`). Si on obtient un pile, la boucle s'arrête et $k < n+1$ donc `z` est affecté du nombre k de lancers effectués (`z = k`).

```python
def simulZ(n):
    k = 1
    while k <= n and rd.random()<1/2 :
        k = k+1
    if k == n+1 :
        z = 0
    else:
        z = k
    return(z)
```

2. Si $Z = 0$, on a alors $X = 0$.

   Si $Z = n$, on fait n tirages dans l'urne qui ne contient que des blanches et $X = n$.

   Si $Z = k \in [\![1, n-1]\!]$, on peut obtenir entre 0 et k boules blanches.

   Donc les valeurs possibles de X sont $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

3. (a) Quand $(Z = 0)$, on a $(X = 0)$ donc $P_{(Z=0)}(X = 0) = 1$ et $P_{(Z=0)}(X = i) = 0$ si $1 \leq i \leq n$.

   (b) Quand $(Z = n)$, on effectue n tirages dans l'urne n qui contient n boules blanches et 0 boules noires. On obtiendra donc n boules blanches.
   Donc $P_{(Z=n)}(X = n) = 1$ et $P_{(Z=n)}(X = i) = 0$ si $0 \leq i \leq n-1$.

   (c) Quand $(Z = k)$ $(1 \leq k \leq n-1)$, on effectue k tirages indépendants dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ noires. Les boules étant équiprobables, la probabilité d'obtenir une blanche est de k/n à chaque tirage.
   Donc le nombre de boules blanche obtenues suit une loi binomiale $\mathcal{B}(k, k/n)$ et on a :

$$P_{(Z=k)}(X=i) = \begin{cases} \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

4. (a) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Z = k)_{k \in [\![0,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n}(Z=k)\cap(X=0)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} P((Z=k)\cap(X=0)) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=0) \quad \text{(probas composées)}
\end{aligned}$$

Comme on a des formules particulières pour $k=0$ et $k=n$, on les traite à part :

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(Z=0)\,P_{(Z=0)}(X=0) + P(Z=n)\,P_{(Z=n)}(X=0)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=0)\\
&= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 0\cdot P(Z=n) + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{k}{0}\left(\frac{k}{n}\right)^{0}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} 1\cdot 1\cdot\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}\\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}
\end{aligned}$$

(b) Pour $(X=n)$, on ne peut obtenir n boules blanches qu'en faisant n tirages, donc si $(Z=n)$. Réciproquement, si $(Z=n)$, on a nécessairement $(X=n)$ car dans l'urne n, il n'y a que des boules blanches.
Donc $(X=n)=(Z=n)$ et on a :

$$P(X=n) = P(Z=n) = \frac{1}{2^n}$$

(c) Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on réutilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Z=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$:

$$P(X=i) = \sum_{k=0}^{n} P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=i)$$

avec, là encore, les valeurs $k=0$ et n à traiter à part et $P_{(Z=k)}(X=i)$ est soit nulle soit donnée par la loi binomiale, donc avec deux formules différentes pour $k \geq i$ et $k < i$ (à exprimer par rapport à k, car c'est lui l'indice de sommation). D'où le découpage de la somme :

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= P(Z=0)\,P_{(Z=0)}(X=i) + P(Z=n)\,P_{(Z=n)}(X=i)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{i-1} P(Z=k)P_{(Z=k)}(X=i) + \sum_{k=i}^{n-1} P(Z=k)P_{(Z=k)}(X=i)\\
&= 0 + 0 + \sum_{k=1}^{i-1} 0\cdot P(Z=k) + \sum_{k=i}^{n-1} P(Z=k)\,P_{(Z=k)}(X=i)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

5. On calcule $\sum_{i=0}^{n} P(X=i)$ en traitant à part $i=0$ et $i=n$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(X=i) &= P(X=0)+P(X=n)+\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)\\ &= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\frac{1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

La somme double $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}$ porte sur les i et k tels que$1\leq i\leq k\leq n-1$ que l'on réordonne : $1\leq k\leq n-1$ et $1\leq i\leq k$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ (on reconnaît le binôme)}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)^k-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \sum_{h=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\end{aligned}$$

D'où le total :

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i)=\frac{2}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k=1.$$

Exercice 3 (EDHEC 2018)

1. (a) Utilisons le théorème de positivité des intégrales.
   - Premier cas : si $x\geq 0$. La fonction $t\mapsto \ln(1+t^2)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Par positivité de l'intégrale (bornes croissantes), $f(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)dt\geq 0$.
   - Deuxième cas : si $x\leq 0$. La fonction $t\mapsto \ln(1+t^2)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Par positivité de l'intégrale (bornes décroissantes), $f(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)dt\leq 0$.

   Ainsi, f est positive sur $[0,+\infty[$ et négative sur $]-\infty,0]$.

   (b) La fonction $t\mapsto \ln(1+t^2)$ et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt=[F(t)]_0^x=F(x)-F(0).$$

   Donc f est C^1 et $f'(x)=F'(x)=\ln(1+x^2)$.

(c) Comme $f'(x) = \ln(1+x^2) \geq 0$ (f' s'annule uniquement en 0), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ (car $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a avec le changement de variable $u = -t$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt = \int_0^x \ln(1+(-u)^2)(-du) = -\int_0^x \ln(1+u^2)du = -f(x).$$

Ainsi, f est impaire.

(b) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, f est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. Elle admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(0,0)$.

3. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{at^2+(a+b)}{1+t^2}.$$

Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$.

(b) Faisons une IPP sur $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$:

$$\begin{array}{c|cc} + & \ln(1+t^2) & 1 \\ & & \searrow \\ - & \dfrac{2t}{1+t^2} & \longrightarrow \; t \end{array}$$

$t \mapsto \ln(1+t^2)$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,

$$f(x) = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt.$$

Or d'après la question précédente,

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Ainsi, $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$

4. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Or $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ en $+\infty$).

Ainsi, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente.

(b) Nous avons démontré à la question 3.(b) que $f(x) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. Or,

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\ln(1+x^2)-2) = +\infty$,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est finie d'après la question précédente.

Ainsi, $2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est négligeable devant $x(\ln(1+x^2)-2)$ au voisinage de $+\infty$.

Donc, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x(\ln(1+x^2)-2) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

(c) Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = o(2\ln(x))$ en $+\infty$.

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$.

(d) De la même façon, si $x < 0$, $f(x) = \ln(x^2) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} x\ln(x^2) = 2x\ln(-x)$

5. (a) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

(b) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ d'après les calculs précédents. D'autre part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Ainsi, $f^{(3)}(0) = 2$.

(c) Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x^3}{3!}.2 + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 4 (EDHEC 2023)

1. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}}dx.$$

Soit $A > 1$.

$$\int_1^A \frac{c}{x^{1+c}}dx = \int_1^A cx^{-1-c}\,dx = c \times \frac{1}{-c}\left[x^{-c}\right]_1^A = -\left[\frac{1}{x^c}\right]_1^A = -\frac{1}{A^c} + 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^c} = 0$, on a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Ainsi, f est bien une densité.

2. $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $F(x) = 0$ si $x < 1$. Si $x \geq 1$, on a (en utilisant le calcul précédent) :
$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} f(t)dt = -\frac{1}{x^c} + 1.$$
Finalement,
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. (a)
   - Si $x < 1$, $tx < t$ donc, sachant $(X > t)$, l'événement $(X \leq tx)$ est impossible. Donc $P_{(X>t)}(X \leq tx) = 0$.
   - Si $x \geq 1$, $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P([X > t] \cap [X \leq tx])}{P(X > T)}$. Or, comme
   $$tx \geq t, \quad [X > t] \cap [X \leq tx] = [t < X \leq tx],$$
   on a donc $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P(t < X \leq tx)}{P(X > t)}$. On fait intervenir la fonction de répartition :
   $$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X \leq tx) &= \frac{F(tx) - F(t)}{F(t)} = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{(tx)^c}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{t^c}\right)}{\left(\dfrac{1}{t^c}\right)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{t^c}\left(1 - \dfrac{1}{x^c}\right)}{\dfrac{1}{t^c}} = 1 - \frac{1}{x^c}. \end{aligned}$$

   (b) Le résultat précédent peut aussi s'écrire :
   $$P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
   On retrouve la fonction de répartition F. Donc la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

4. $G(1) = P(Y \leq 1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(t)dt = 0$ car g est nulle sur $]-\infty, 1[$.

5. (a) Soit $x \geq 1$ et $t > 1$. On sait que $G(tx) - G(t) = P(t < Y \leq tx)$ et $1 - G(t) = P(Y > t)$. Donc
   $$\begin{aligned} \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)} &= \frac{P(t < Y \leq tx)}{P(Y > t)} \\ &= \frac{P([Y > t] \cap [Y \leq tx])}{P(Y > t]} \end{aligned}$$
   On reconnaît la définition d'une probabilité conditionnelle. Donc :
   $$\begin{aligned} \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)} &= P_{(Y>t)}(Y \leq tx) = P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) \\ &= P(Y \leq x) \quad \text{car } \frac{Y}{t} \text{ sachant } (Y > t) \text{ a même loi que } Y \\ &= G(x) \end{aligned}$$

(b) G est la fonction de répartition d'une variable à densité donc G est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement aux points où sa densité g n'est pas continue, donc $\mathscr{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. G est bien $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$, on va dériver la formule précédente par rapport à x (t étant considéré comme une constante).
$x \mapsto \dfrac{G(t)}{1-G(t)}$ est constante (ne dépend pas de x), donc sa dérivée par rapport à x est nulle.
$x \mapsto \dfrac{1}{1-G(t)}\, G(tx)$ a pour dérivée $\dfrac{1}{1-G(t)}\, tG'(tx)$.
On a bien

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1-G(t)}$$

(c) En tout u où G est $\mathscr{C}^1$, $G'(u) = g(u)$ donc

$$\forall x > 1, \forall t > 1 \quad g(x) = \frac{tg(tx)}{1-G(t)}.$$

On fait tendre x vers 1 à droite. g est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = c$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(tx) = g(t)$.
Donc $c = \dfrac{tg(t)}{1-G(t)}$ qui peut s'écrire aussi $c - cG(t) = tG'(t)$.
On sait que $c > 0$ car g est strictement positive sur $[1, +\infty[$ donc en particulier en 1. En divisant par c, on obtient bien la relation :

$$G(t) + \frac{t}{c}\, G'(t) = 1.$$

6. (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c\, y(t)$. z est $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ par produit de fonctions $\mathscr{C}^1$. Pour tout $t > 1$,

$$z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t).$$

Pour tout $\in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
z(t) \text{ constante} &\iff z'(t) = 0 \\
&\iff ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 \\
&\iff y(t) + \frac{t}{c}\, y'(t) = 0 \quad \text{en multipliant par } \frac{1}{ct^{c-1}} \neq 0 \\
&\iff y \text{ solution de } (E_1)
\end{aligned}$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_1) &\iff z(t) = K \\
&\iff t^c y(t) = K \\
&\iff y(t) = \frac{K}{t^c}
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_1) sont les fonctions $t \mapsto y(t) = \dfrac{K}{t^c}$, avec $K \in \mathbb{R}$ constante.

(c) La fonction constante $u = 1$ est (évidemment) solution de (E_2).

(d) On a donc $u + \frac{t}{c}u' = 1$. Posons $z = h - u$.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\iff h + \frac{t}{c}\, h' = 1 \\ &\iff h + \frac{t}{c}\, h' = u + \frac{t}{c}\, u \\ &\iff (h-u) + \frac{t}{c}\, (h'-u') = 0 \\ &\iff z + \frac{t}{c}\, z' = 0 \\ &\iff (h-u) \text{ solution de } (E_1) \end{aligned}$$

(e) En utilisant la question 6.(b), $(h-u)(t) = \frac{K}{t^c}$ donc $h(t) = u(t) + \frac{K}{t^c} = 1 + \frac{K}{t^c}$.
Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \qquad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. (a) G est solutions de (E_2) donc : $\forall t > 1, \quad G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$.
Mais G est continue sur $\mathbb{R}$ et $G(t) = 0$ pour $t < 1$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} G(t) = 0$.
On a donc nécessairement $\lim\limits_{t \to 1^+} G(t) = 0$.
Or $\lim\limits_{t \to 1^+} 1 + \frac{K}{t^c} = 1 + K$, donc $1 + K = 0$ et, au final $K = -1$. Donc :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

(b) On a démontré que $G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$ sur $]1, +\infty[$.
On a vu que $G(1) = 0$ et, par ailleurs $1 - \frac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0$. On peut donc écrire :

$$\forall t \in [1, +\infty[\qquad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

On a $G(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 1[$ donc Y suit une loi de Pareto de paramètre c.

8. (a) $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Donc $H(x) = 0$ pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$

$$H(x) = P(Z \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-cx}.$$

Ainsi,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) On reconnaît une loi exponentielle de paramètre c donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

(c) On sait facilement simuler une variable Z suivant loi exponentielle de paramètre c, et après, il suffit d'en prendre l'exponentielle car $X = e^Z$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)
    Z = np.exp(Z)
    return Z
```