Correction - DS 9 (A)

Devoir surveillé du Jeudi 27 Février

Exercice 1 (EML 2018)

1. (a) On a $v = f(e_1) + e_1$ mais, puisque A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la lecture de sa première colonne permet d'affirmer que $f(e_1) = -2e_2 + e_3$. Ainsi,

$$v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3.$$

(b) Montrons que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est libre. Soient $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v + \gamma e_1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda(e_1 - e_2) + \mu(e_1 - 2e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu + \gamma)e_1 + (-\lambda - 2\mu)e_2 + \mu e_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu + \gamma &=& 0 \\ -\lambda - 2\mu &=& 0 \\ \mu &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Par définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer P^{-1}, on peut procéder à un calcul d'inverse mais on peut plus élégamment utiliser le fait que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et que, si l'on pose $e'_1 = u$, $e'_2 = v$ et $e'_3 = e_1$, alors on a les relations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e_1 &=& e'_3 \\ e_2 &=& e'_3 - e'_1 \\ e_3 &=& -2e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) En effectuant le produit matriciel, on a $f(u) = 2u$, $f(v) = -v$. Enfin, par définition de v, $f(e_1) = v - e_1$. On a donc par définition de la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Avec la formule de changement de bases :

$$M_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \quad \text{donc} \quad A' = P^{-1}AP.$$

(c) La matrice A' est triangulaire, ses valeurs propres sont donc situées sur sa diagonale. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$. Déterminons les sous-espaces propres associés :

- Pour $E_{-1}(A')$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = z = 0.$$

Donc $E_{-1}(A') = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (on obtient une base de $E_{-1}(A')$ car c'est une famille libre, un vecteur non nul, et génératrice).

- Pour $E_2(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3y + z & = & 0 \\ -3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = z = 0.$$

Donc $E_2(A') = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (on obtient une base de $E_2(A')$ car c'est une famille libre, un vecteur non nul, et génératrice).

(d) Comme $0 \notin Sp(A')$, A' est inversible. Comme $A = PA'P^{-1}$, A est donc également inversible car c'est le produit de matrices inversibles.

Si A est diagonalisable, alors il existe Q inversible et D diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$. On a alors $A' = P^{-1}QDQ^{-1}P = (P^{-1}Q)D(P^{-1}Q)^{-1}$ et A' est aussi diagonalisable.

Or $Sp(A') = \{-1, 2\}$, $E_{-1}(A') = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A') = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Par concaténation, $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ mais ce n'est pas une base car son cardial est égal à 2 et la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vaut 3. Donc A' n'est pas diagonalisable. Donc A ne peut pas non plus être diagonalisable.

3. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= g(1,0,0) = (1,0,-1) = e_1 - e_3 \\ g(e_2) &= g(0,1,0) = (1,2,1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ g(e_3) &= g(0,0,1) = (-1,0,1) = -e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Un produit matriciel direct donne :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2B.$$

(c) D'après 3.(b), on a $B^2 - 2B = 0$ donc $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de B. Il s'ensuit que les valeurs propres possibles pour B sont les racines de $X^2 - 2X = X(X-2)$. Ainsi,

$$Sp(B) \subset \{0, 2\}.$$

- Pour $E_0(B)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(B) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x+y-z & = 0 \\ 2y & = 0 \\ -x+y+z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, $E_0(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (on obtient une base de $E_0(B)$ car c'est une famille libre, un vecteur non nul, et génératrice).

- Pour $E_2(B)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B) \Leftrightarrow BX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2x \\ 2y & = & 2y \\ -x+y+z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y - z$$

Ainsi, $E_2(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (on obtient une base de $E_2(B)$ car c'est une famille libre, deux vecteurs non colinéaires, et génératrice).

(d) $0 \in \mathrm{Sp}(B)$ donc B n'est pas inversible.

Par concaténation, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Elle est de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et B est diagonalisable.

4. (a) Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   - $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
   - On a $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ donc $0_3 \in \mathcal{E}$.
   - Fixons $M, N \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$B(\lambda M + N) = \lambda BM + BN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A,$$

car $M, N \in \mathcal{E}$ à la troisième égalité. Ainsi, $\lambda M + N \in \mathcal{E}$.

En conclusion, $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$, on a donc $BM = MA$. Supposons que M est inversible. On peut alors réécrire la relation d'appartenance à $\mathcal{E}$ comme :

$$A = M^{-1}BM.$$

Les matrices A et B sont ainsi semblables. Or on a vu en 3.(d) que B est diagonalisable et en 2.(d) que A ne l'est pas. On a donc une contradiction. Ainsi, si $M \in \mathcal{E}$, alors M n'est pas inversible.

5. (a) Le rang étant invariant par transposition, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$rg(A - \lambda I_3) = rg({}^t(A - \lambda I_3)) = rg({}^tA - \lambda I_3).$$

(b) On a observé en 2.(d) que $2 \in Sp(A')$. Or $A - 2I_3$ et $A' - 2I_3$ sont semblables car :

$$A - 2I_3 = PA'P^{-1} - 2I_3 = P(A' - 2I_3)P^{-1}.$$

Comme deux matrices semblables ont même rang,

$$2 \in Sp(A') \Rightarrow rg(A' - 2I_3) < 3 \Rightarrow rg(A - 2I_3) < 3 \Rightarrow 2 \in Sp(A).$$

Donc, avec 3.(c), $2 \in Sp(A) \cap Sp(B)$. Mais

$$\begin{aligned} Sp(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid rg(A - \lambda I_3) < 3\} \\ &\underset{(5.(a))}{=} \{\lambda \in \mathbb{R} \mid rg({}^tA - \lambda I_3) < 3\} \\ &= Sp({}^tA). \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = 2 \in Sp({}^tA) \cap Sp(B)$.

(c) On a $X \in E_2(B)$ donc $BX = 2X$ et $Y \in E_2({}^tA)$ donc ${}^tAY = 2Y$. On a ainsi,

$$BN = BX\,{}^tY = 2X\,{}^tY = 2N$$

et

$$NA = X\,{}^tYA = X\,{}^t({}^tAY) = X\,{}^t(2Y) = 2X\,{}^tY = 2N.$$

Ainsi, $BN = NA$ et donc $N \in \mathcal{E}$.

Il reste à montrer que N est non-nulle. On commence par observer que X et Y sont non nuls, donc en particulier, si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, on a

$${}^tYY = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 \neq 0.$$

Par l'absurde, supposons que $N = 0_3$, on a alors :

$$N = 0_3 \Rightarrow NY = 0 \Rightarrow X\,{}^tYY = 0 \Rightarrow X \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2\right) = 0 \Rightarrow X = 0.$$

On obtient une contradiction. Ainsi, $N \in \mathcal{E} \setminus \{0_3\}$.

(d) On sait d'après 3.(c) que $E_2(B)$ est de dimension 2. Fixons une base (X_1, X_2) de $E_2(B)$ et fixons un vecteur propre $Y \in E_2({}^tA)$. Il suit alors de la question 5.(c) que $N_1 = X_1\,{}^tY$ et $N_2 = X_2\,{}^tY$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{E}$. Montrons alors que la famille (N_1, N_2) est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3$. On a alors

$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3 \Rightarrow \lambda_1 X_1\,{}^tY + \lambda_2 X_2\,{}^tY = 0_3 \Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)\,{}^tY = 0_3.$$

$E_2(B)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, si on pose $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, on a $X \in E_2(B)$ et $X\,{}^tY = 0_3$. Il suit alors de la question 5.(c) que $X = 0$ et donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$. La famille (X_1, X_2) étant une base de $E_2(B)$, elle est en particulier libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, (N_1, N_2) est une famille libre formée de deux vecteurs de $\mathcal{E}$. Ainsi, $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2 (EML 2019)

1. (a) F_U est une fonction de répartition donc pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 \leq F_U(t) \leq 1$.

Par ailleurs f_V est une densité donc pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f_V(t) \geq 0$. Ainsi par produit,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq F_U(t) f_v(t) \leq f_V(t).$$

(b) La fonction $F_U f_v$ est continue sur $[0, +\infty[$ (comme produit de F_U fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, et de f_V continue sur $[0, +\infty[$ par hypothèse), à valeurs positive sur $[0, +\infty[$ d'après la question précédente. Enfin, d'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$, $F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)dt$ converge car f_V est une densité. Ainsi par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)dt$ converge.

2. La fonction f_V est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)dt$ converge et vaut 1. Par ailleurs, f_V est nulle sur $]-\infty, 0[$ par hypothèse donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_V(t)dt = 0$. Ainsi $1 = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_V(t)dt$.

   En utilisant cette information on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} P(U > V) &= 1 - P(U \leq V) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\, dt - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(f_V(t) - F_U(t) f_V(t)\big)\, dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\big(1 - F_U(t)\big)\, dt. \end{aligned}$$

3. (a) D'après le cours, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

   (b) D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} P(U > V) &= \int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big) f_V(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t}\, dt \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \mu \Big[-\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} \Big]_0^A \\ &= \lim_{A \to +\infty} \mu \Big(-\frac{e^{-(\lambda+\mu)A}}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \Big) \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \end{aligned}$$

   car $\lambda + \mu > 0$ donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-(\lambda+\mu)A} = 0$.

4. (a) Soit $t \in [0, +\infty[$. On a $[M_n > t] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [T_i > t]$, donc par indépendance de $T_1, \ldots, T_n$, puis en utilisant le fait que $T_1, \ldots, T_n$ suivent la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$,

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) = \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F_{T_i}(t)\big) = \big(1 - F_{T_1}(t)\big)^n \\ &= (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t}. \end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$,

$$F_{M_n(t)} = 1 - P(M_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}.$$

   Par ailleurs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$, par conséquent pour tout $t < 0$, $F_{M_n}(t) = 0$. Finalement, on a montré que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0\,, \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

   On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, donc $M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

5. (a) $[N = 1] = [T_1 \leq T_0]$ par définition de N.
   D'après le résultat admis à la Partie A, puisque T_0 et T_1 sont à densité et admettent une densité nulle sur $]-\infty, 0[$,

$$\begin{aligned} P(N = 1) &= P(T_1 \leq T_0) = \int_0^{+\infty} F_{T_1}(t) f_{T_0}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t}) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \big(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\big) dt = \lambda \lim_{A \to +\infty} \Big[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \Big]_0^A \\ &= \lambda \Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \Big) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

car $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda t} = \lim\limits_{A\to+\infty} e^{-2\lambda t} = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[N > n] \cup [N = 0]$ est l'événement "le plus petit indice $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$, s'il existe, est strictement supérieur à n", c'est-à-dire "pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i > T_0$", c'est-à-dire $[M_n > T_0]$. On a donc $[N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]$.
Les variables aléatoires M_n et T_0 étant à densité et admettant une densité nulle sur $]-\infty, 0[$, on peut appliquer le résultat de la question 2 :

$$\begin{aligned} P([N > n] \cup [N = 0]) &= P(M_n > T_0) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_{M_n}(t)\big) f_{T_0}(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-n\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(n+1)\lambda t}dt = \lim_{A\to+\infty} \Big[-\frac{e^{-(n+1)\lambda t}}{n+1}\Big]_0^A = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

car $(n+1)\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-(n+1)\lambda A} = 0$.

(c) Soit $n \geq 2$ un entier. On a $[N = n] = \big([N > n-1] \cup [N = 0]\big) \setminus \big([N > n] \cup [N = 0]\big)$ donc $P(N = n) = P([N > n-1] \cup [N = 0]) - P([N > n] \cup [N = 0])$, par conséquent d'après la question précédente (on a bien $n - 1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$P(N = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(d) On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$ donc on sait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(N = n) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) = 1 - P(N = 1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(N = n) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big). \end{aligned}$$

Or pour tout entier $M \geq 2$, à l'aide d'un changement d'indice puis en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{M} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) &= \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{M+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{M+1} \\ &\xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et donc $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{2}$.

Finalement, $P(N = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

6. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} nP(N = n)$ converge absolument, si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 2} n\frac{1}{n(n+1)}$ converge absolument, or pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \geq 0$ et $\frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi N n'admet pas d'espérance.

Exercice 3 (EML 2020)

1. La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ car elle est le quotient de $x \mapsto \ln(1-x)$ qui est dérivable sur $]0,1[$ et de $x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable sur $]0,1[$ et ne s'annule pas sur $]0,1[$.

   Pour tout $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{1-x}\ \ln(x) - \ln(1-x)\frac{1}{x}}{\big(\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{\frac{-x\,(1-x)}{1-x}\ \ln(x) - \ln(1-x)\ \frac{x\,(1-x)}{x}}{x(1-x)\ \big(\ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)}{x\,(1-x)\ \big(\ln(x)\big)^2} \end{aligned}$$

2. (a) Soit $t \in]0,1[$. Alors $\ln(t) < 0$ donc $t\ln(t) < 0$ (par multiplication par $t > 0$).

   (b) Soit $x \in]0,1[$. D'après la question 1, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\ \big(-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)\big)$$

   Or : $x > 0$, $1-x > 0$ et $\big(\ln(x)\big)^2 > 0$. Ainsi : $x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2 > 0$.
   On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x)$.
   En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = x \in]0,1[$, on obtient : $x\ \ln(x) < 0$ et donc $-x\ \ln(x) > 0$.
   En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = 1-x \in]0,1[$, on obtient : $(1-x)\ \ln(1-x) < 0$ et donc $-(1-x)\ \ln(1-x) > 0$.
   Ainsi : $-x\ \ln(x) - (1-x)\ \ln(1-x) > 0$. On en déduit : $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0,1[$.

3. (a) Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0 \times 0 = 0$$

   La fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

   (b) Soit $x \in]0,1[$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)} \sim \frac{-x}{x\ \ln(x)} = \frac{-1}{\ln(x)}$$

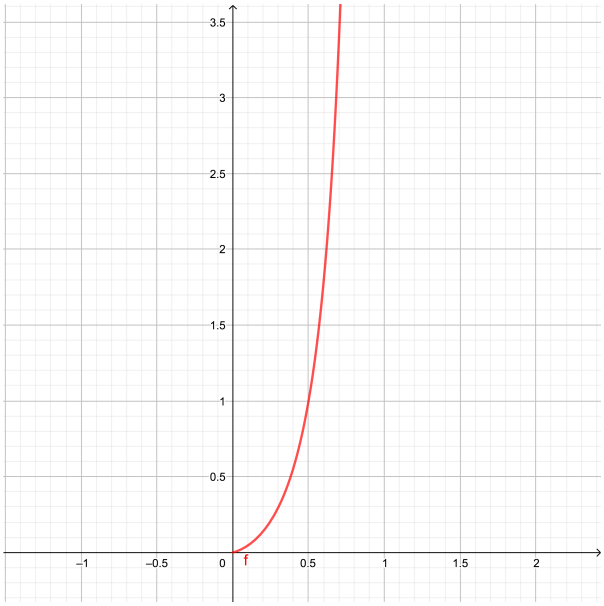
   Or : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{\ln(x)} = 0$. Le taux d'accroissement admet donc une limite finie lorsque $x \to 0$.
   On en conclut que la fonction f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

4. Tout d'abord, comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$. En posant $t = 1-x$, on obtient : $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = \lim\limits_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$. On en déduit, par produit de limites :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty$$

   Comme $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.

5. Voici la courbe représentative (faire attention à bien représenter la tangente horizontale en 0 et l'asymptote verticale d'équation $x = 1$) :



6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

   La fonction h_n est une fonction polynomiale (de degré n). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$h_n'(x) \;=\; nx^{n-1} + 1$$
   Comme $x \geq 0$, alors : $x^{n-1} \geq 0$. Ainsi : $nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$h_n'(x)$	$+$	
$h_n(x)$	-1 ↗	$+\infty$

   La fonction h_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $h_n([0, +\infty[)$. Or :
$$h_n([0, +\infty[) \;=\; [h_n(0), \lim_{x \to +\infty} h_n(x)[\;=\; [-1, +\infty[$$
   Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0, +\infty[$.

   L'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $h_n(0) = -1$, $h_n(u_n) = 0$ (par définition) et $h_n(1) = 1$. Donc :
$$h_n(0) \;<\; h_n(u_n) \;<\; h_n(1)$$
   Or, h_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On obtient donc en revenant aux antécédents que :
$$0 < u_n < 1.$$
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \,]0, 1[$.

8. Par définition, u_1 est l'unique solution positive de l'équation : $h_1(x) = 0$. Or :

$$h_1(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^1 + x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\,x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$$

On en déduit : $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Par définition, u_2 est l'unique solution positive de l'équation : $h_2(x) = 0$. Or :

$$h_2(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 1 = 0$$

Cette fonction polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$. Ainsi, h_2 admet deux racines :

$$x_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad x_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Comme $5 \geq 1$, alors : $\sqrt{5} \geq \sqrt{1} = 1$ et ainsi : $\sqrt{5} - 1 \geq 0$.

On en déduit : $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

9. (a) Voici le programme demandé :

```
def valeur_approchee(n)
  a = 0
  b = 1
  while (b-a) > 10**(-3):
    c = (a+b)/2
    if c^n+c-1>0:
      b = c
    else:
      a = c
  return(c)
```

(b) Le graphe permet d'effectuer les conjectures suivantes :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{2}$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{\ln\left({u_n}^n\right)}{\ln(u_n)} \quad (\text{car } {u_n}^n = 1 - u_n \text{ par définition de } u_n) \\ &= n \end{aligned}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) = n$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$f(u_n) = n \;\leq\; n + 1 = f(u_{n+1})$$

Or, d'après l'étude en partie A, la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$. On obtient donc en revenant aux antécédents que : $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

(c) Toujours d'après la partie A, f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Donc f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$ et elle admet une bijection réciproque $f^{-1}:]0,+\infty[\to]0,1[$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
Donc (u_n) converge vers $\ell = 1$.