Correction - DS 9 (A)

Devoir surveillé du Vendredi 23 Février

Exercice 1 (EML 2023)

1. (a) La matrice A associée à (S) est telle que $(S) \Leftrightarrow X' = AX$. On obtient donc :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Voici les instructions `Python` demandées :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> A = np.array([[3, 1, 1], [1, 3, 1], [1, 1, 3]])
```

(c) On calcule ici le rang des matrices $A - 2I_3$ et $A - 5I_3$. Comme le rang obtenu est < 3, les matrices $A - 2I_3$ et $A - 5I_3$ sont non-inversibles donc 2 et 5 sont valeurs propres de A. Avec le théorème du rang, on déduit de plus des résultats obtenus avec `Python` que :

$$\dim(E_2(A)) = \dim(Ker(A - 2I)) = 3 - rg(A - 2I) = 2,$$

et

$$\dim(E_5(A)) = \dim(Ker(A - 5I)) = 3 - rg(A - 5I) = 1.$$

(d) Comme les valeurs propres potentielles sont données à la question précédente, on ne fait pas le pivot et on passe directement à la recherche des sous-espaces propres. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$$

Donc $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Comme $E_2(A) \neq \{0\}$, 2 est bien valeur propre de A. Les deux vecteurs obtenus sont non colinéaires donc ils forment une famille libre. C'est aussi une famille génératrice de $E_2(A)$ et c'est donc une base de $E_2(A)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5(A) \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc $E_5(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme $E_5(A) \neq \{0\}$, 5 est bien valeur propre de A. Le vecteur obtenu est non nul donc il forme une famille libre. C'est aussi une famille génératrice de $E_5(A)$ et c'est donc une base de $E_5(A)$.

Il n'y a pas d'autre valeur propre car on a déjà obtenu 2 avec $E_2(A)$ de dimension 2 et 5 avec $E_5(A)$ de dimension 1 et A est une matrice carrée de taille 3.

2. Comme A est symétrique réelle, c'est une matrice diagonalisable (on peut aussi le démontrer par concaténation...). D'après la question précédente, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le système différentiel (S) s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$ où $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et x, y z sont des fonctions dérivables.

   Comme A est diagonalisable, on sais, d'après le cours, que la solution générale de (S) est alors :
$$X : t \mapsto \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   avec α, β, γ des réels.

4. (a) Le résultat qui permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

   (b) D'après la question 4, il existe α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout t réel :
$$X_0(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Puis on a les équivalences :
$$X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ -\alpha \quad + \gamma & = -1 \\ \quad - \beta + \gamma & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha + 2\beta = 1 \\ -\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \gamma = 0 \end{cases}$$
   On a ainsi : $X_0 : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) On a :
$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(B) &\Leftrightarrow B - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow det(B - \lambda I) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1. \end{aligned}$$
   La matrice B admet une seule valeur propre qui est 1.

   (b) Supposons que la matrice B soit diagonalisable. On peut alors écrire $B = PDP^{-1}$ avec $D = I$ (car $Sp(B) = \{1\}$ et P inversible, donc $B = I$, ce qui est absurde.
   La matrice B n'est pas diagonalisable.

6. (a) Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, donc $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) On a :
$$B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Donc $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_1 + v_2$ et donc :
$$T = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Une matrice Q qui convient est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ qui est :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (a) On a les équivalences suivantes :

$$X' = BX \Leftrightarrow X' = QTQ^{-1}X \Leftrightarrow Q^{-1}X' = TQ^{-1}X \Leftrightarrow (Q^{-1}X)' = TQ^{-1}X \Leftrightarrow Y' = TY,$$

par linéarité de la dérivation à la troisième équivalence.

(b) Posons $y_p(t) = te^t$. y_p est dérivable et $y_p'(t) = e^t + te^t$. On a alors :

$$y_p'(t) - y_p(t) = e^t + te^t - te^t = e^t.$$

Ainsi, $t \mapsto te^t$ est bien solution particulière de $y' - y = e^t$.

(c) On pose $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Alors :

$$Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} u' = u + v \\ v' = v \end{cases}$$

Comme $v' - v = 0$, $v(t) = \lambda e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (solution d'une équation différentielle du premier ordre).

On a donc $u' - u = \lambda e^t$. D'après la question 7.(b) et le principe de superposition, $t \mapsto \lambda te^t$ est une solution particulière de cette équation différentielle. Et les solutions de l'équation différentielle homogène associées sont de la forme $t \mapsto \mu e^t$. Donc $u(t) = \lambda te^t + \mu e^t$.

Finalement, les solutions de $Y' = TY$ sont :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda te^t + \mu e^t \\ \lambda e^t \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels.}$$

(d) On a finalement avec la question 6.(a) et la question précédente :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (\Sigma) &\Leftrightarrow X' = BX \Leftrightarrow Y' = TY \\ &\Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda te^t + \mu e^t \\ \lambda e^t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = Q\begin{pmatrix} \lambda te^t + \mu e^t \\ \lambda e^t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 2\lambda te^t + 2\mu e^t - \lambda e^t \\ -\lambda te^t - \mu e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec λ et μ deux réels.

Exercice 2 (EML 2011)

1. X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n, atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $E(X) = np$, $V(X) = npq$..

2. Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au i-ième essai) est :

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2) = q^2$$

par indépendance.

Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - q^2$.

Comme précédemment, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1 - q^2\right)$, $E(Z) = n\left(1 - q^2\right)$ et $V(Z) = nq^2\left(1 - q^2\right)$.

3. Y est donc le nombre de joueur atteignant au moins une fois la cible, mais pas la première fois : c'est le nombre de ceux l'atteignant uniquement la seconde fois.

   Pour chaque joueur, la probabilité est $P(E_1 \cap S_2) = P(E_1) P(S_2) = pq$ par indépendance.

   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$.

4. (a) X et Y ne sont pas indépendantes :
   $((X = n) \cap (Y = n))$ est impossible donc $P((X = n) \cap (Y = n)) = 0 \neq P(X = n) P(Y = n)$.

   (b) Deux possibilités pour calculer la covariance du couple (X, Y) :

   - Si on utilise Koenig-Huygens, $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$ demande de calculer $E(X, Y)$, ce qui semble laborieux.
   - Si on utilise la variance d'une somme :

   $$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y),$$

   on a :

   $$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \frac{1}{2}(V(Z) - V(Y) - V(X)) \\ &= \frac{1}{2}\left(nq^2\left(1 - q^2\right) - npq(1 - pq) - npq\right) \\ &= \frac{1}{2}nq(q(1 - q)(1 + q) - p(1 - pq) - p) \\ &= \frac{1}{2}nqp(q(1 + q) - 1 + pq - 1) \\ &= \frac{1}{2}nqp\left(q + q^2 - 2 + (1 - q)q\right) \\ &= -np^2q \end{aligned}$$

   Remarquons que la covariance négative est cohérente : plus X est grand, plus Y risque d'être petit.

5. (a) Voici la fonction demandée :

```python
def simulX(n, p):
    x = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < p:
            x = x+1
    return(x)
```

   (b) La fonction `mystere` définie trois vecteurs `x`, `y` et `xy` de 10000 coefficients. A l'aide de la boucle `for`, on remplie ces vecteurs de 10000 simulations de X, de Y et de XY. En faisant la moyenne sur 10000 simulations, on obtient par la loi faible des grands nombres une approximation de $E(XY) - E(X) * E(Y)$, c'est-à-dire par Koenig-Huygens, de $Cov(X, Y)$. Ainsi, cette fonction `mystere` devrait retourner une approximation de $Cov(X, Y)$, c'est-à-dire une valeur proche de $-np^2q$.

6. On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(U = n) = q^{n-1}p$, $E(U) = \dfrac{1}{p}$ et $V(U) = \dfrac{q}{p^2}$.

7. (a) $(U=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc pour tout $t \in [0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} P(T>t) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(U=n)\cap(T>t)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((U=n)\cap(T>t)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(U=n)}(T>t)\,P(U=n) \quad \text{(probas composées)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}q^{n-1}p = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}q\right)^n \\ &= \frac{p}{q}e^{-t}q\frac{1}{1-e^{-t}q} \quad \text{(série géom conv car } \left|e^{-t}q\right|<1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \in [0;+\infty[$, $P(T>t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$.

(b) La fonction de répartition de T est donc donnée pour tout $t \geq 0$ par :

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \frac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$$

Comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F(0) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 0$, alors $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

(c) F est donc continue
- sur $[0;+\infty[$ car $1-q\ e^{-t} \neq 0$;
- sur $]-\infty, 0[$ fonction nulle ;
- en 0^- car $F(t) = 0 \to 0 = F(0)$.

Donc la fonction de répartition de T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et T est à densité. Une densité est F' là où F est C^1. Pour $t > 0$:

$$F(t) = 1 - \frac{p\ e^{-t}}{1-q\ e^{-t}}$$

et

$$F'(t) = -p\frac{-e^{-t}\left(1-qe^{-t}\right) - qe^{-t}e^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2} = \frac{pe^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2}$$

Ainsi, T est à densité et une densité est

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{pe^{-t}}{\left(1-qe^{-t}\right)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

8. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in [0;+\infty[$,

$$P_{(U=n)}(Z>z) = P_{(U=n)}(UT>z) = P_{(U=n)}(T>z/n) = e^{-nz/n} = e^{-z}.$$

(b) On repasse par les probabilités totales (même raisonnement qu'à la 7.(a)) :

$$P(Z>z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U=n)\,P_{(U=n)}(Z>z) = e^{-z}\sum_{n=1}^{+\infty} P(U=n) = e^{-z}$$

car $(U = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un SCE.
On a donc pour tout $z > 0$ (en notant G la fonction de répartition de Z),

$$G(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - e^{-z}.$$

Comme G est continue, $G(0) = \lim\limits_{z\to 0^+} G(z) = 0$.
Comme G est croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, $G(z) = 0$ pour tout $z \leq 0$.
Finalement,

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

où l'on reconnait que Z suit une loi $\mathcal{E}(1)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in [0; +\infty[$, on a avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P((U = n) \cap (Z > z)) &= P(U = n)\, P_{(U=n)}(Z > z) \\ &= P(U = n)\, e^{-z} \\ &= P(U = n)\, P(Z > z) \end{aligned}$$

Exercice 3 (EML 2017)

1. (a) La fonction f est deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

(b) Pour tout $x > 0$, on a $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
On a :

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \underset{0^+}{\to} -\infty,\ f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \underset{+\infty}{\to} +\infty \text{ et } f'(1) = e^1 - e/1 = 0.$$

D'où le tableau de variation de f' :

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

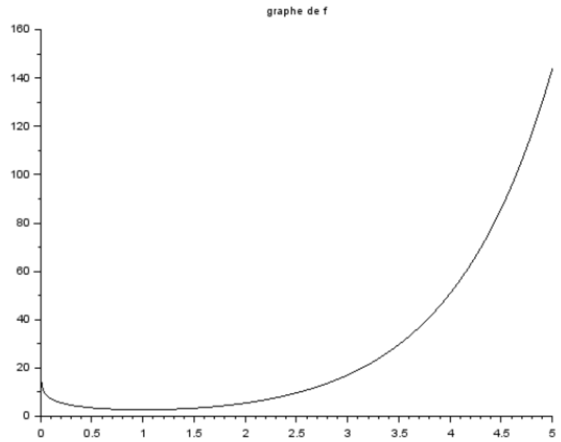
2. On a :

$$f(x) = e^x - e\ln(x) \underset{0^+}{\to} +\infty,\ f(x) = e^x(1 - e\frac{\ln(x)}{e^x}) \underset{+\infty}{\to} +\infty \text{ (par c.c.) et } f(1) = e^1 - e\ln(1) = e.$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. En $+\infty$, $\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ et f a une "allure exponentielle" en $+\infty$. On obtient la courbe représentative de f :



4. (a) u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x) = (f'(x) - x)' = f''(x) - 1$.
Or, pour tout $x > 0$, $f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2} > e^x > 1$. Donc $u'(x) = f''(x) - 1 > 0$ sur $]0;+\infty[$.
Ainsi, u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
(b) Calculons tout d'abord les limite de u :
$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - \frac{e}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{e}{x.e^x} - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty.$$
u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc u réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (par le théorème de la bijection).
$0 \in \mathbb{R}$ donc 0 admet un unique antécédent $\alpha \in]0;+\infty[$ par u. Autrement dit, l'équation $u(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.
De plus, $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 > 0$, donc $u(1) < u(\alpha) < u(2)$ et comme u est strictement croissante, $1 < \alpha < 2$.

5. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "u_n existe et $u_n \geq 2$".
Ini. $u_0 = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 2 > 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} = f(u_n) \geq e \geq 2$ d'après la question 2. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

6. (a) g est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - 1$.
Or f' est croissante sur $[2;+\infty[$, donc si $x \geq 2$:
$$g'(x) = f'(x) - 1 \geq f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 \geq 7,3 - \frac{2,8}{2} - 1 = 4,9 > 0.$$
Ainsi, g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.
(b) g est croissante sur $[2;+\infty[$ et $g(2) = f(2) - 2 \geq e - 2 > 0$ donc, pour tout $x \geq 2$, $g(x) > 0$ et $f(x) > x$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle est convergente ou elle tend vers $+\infty$. Démontrons par l'absurde qu'elle n'est pas convergente.

Comme $u_n \geq 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite (u_n) admettait une limite finie ℓ, on aurait $\ell \geq 2$ et $f(\ell) = \ell$ (par continuité de f). Comme d'après 6.(a), l'équation $f(\ell) = \ell$ n'a pas de solution dans $[2;+\infty[$, une telle limite ℓ n'est pas possible, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8. Voici le programme demandé :

```
U = 2
N = 0
while U < A:
    U = np.exp(U)-np.exp(1)*np.log(U)
    N = N+1
print(N)
```

9. (a)
   - Pour $2\ln(x) \leq x$: Posons $h(x) = 2\ln(x) - x$. On a $h'(x) = 2/x - 1 < 0$ sur $[2;+\infty[$. Donc h est décroissante et pour tout $x \geq 2$, $h(x) \leq h(2) = 2\ln(2) - 2 < 2\times 0,6 - 2 < 0$.
   - Pour $x \leq \dfrac{e^x}{3}$: Posons $k(x) = x - \dfrac{e^x}{3}$. On a $k'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{3} < 1 - \dfrac{2,7}{3} < 0$ sur $[2;+\infty[$.
   Donc k est décroissante et pour tout $x \geq 2$, $k(x) \leq k(2) = 2 - \dfrac{e^2}{3} < 2 - \dfrac{7,3}{3} < 0$.

   On a donc démontré que : $\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leq x \leq \dfrac{e^x}{3}$.

   (b) $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e \times \ln(u_n)$.
   D'après ce qui précède : $e^{u_n} \geq 3u_n$ et $\ln(u_n) \leq \dfrac{u_n}{2}$ donc $-e\ln(u_n) \geq -e \times \dfrac{u_n}{2}$.
   On obtient alors, en ajoutant les 2 inégalités :
   $$u_{n+1} = e^{u_n} - e \times \ln(u_n) \geq 3u_n - e \times \frac{u_n}{2} = \frac{6-e}{2}u_n.$$

   (c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2}u_n > 0$, on a aussi :
   $$0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{2}{6-e} \times \frac{1}{u_n}.$$
   On pourrait alors démontrer par récurrence (à faire) que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{2}{6-e}\right)^n \times \frac{1}{u_0}.$$
   Or, comme $\dfrac{2}{6-e} \in]-1;1[$, la série de terme général $\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$ est convergente.
   Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est elle aussi convergente.

10. En $+\infty$, $\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x > 0$.
    Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^x dx$ est divergente, car $\displaystyle\int_1^A e^x dx = e^A - e^1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
    Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est elle aussi divergente.

11. Grâce au 9.(a), on a pour tout $x \geq 2$: $e^x \geq 6\ln(x)$ et $-\ln(x) \geq -\dfrac{e^x}{6}$.
    Donc $f(x) = e^x - e\ln(x) \geq e^x - e \times \dfrac{e^x}{6} = \dfrac{6-e}{6} \times e^x > 0$.
    On en déduit alors que : $0 < \dfrac{1}{f(x)} \leq \dfrac{6}{6-e} \times \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{6}{6-e}e^{-x}$.
    Or l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente, $\displaystyle\int_2^A e^{-x}dx = e^{-2} - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$.
    Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ est elle aussi convergente.