

Correction - DS 9 (B)

Devoir surveillé du Vendredi 23 Février

ESSEC II 2008

1. Si $x \geq 0$ on a : $|x| - x = x - x = 0 \geq 0$.Si $x < 0$, on a : $|x| - x = -2x \geq 0$.Ainsi, pour tout x réel, $|x| - x \geq 0$.2. (a) On a $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Donc

$$\begin{aligned} & (|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 \\ &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2|v_1||v_2| + 2|v_1||v_3| + 2|v_2||v_3| \\ & \quad - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_2v_3) \end{aligned}$$

et comme $|x|^2 = x^2$ et $|xy| = |x||y|$ pour tous réels x et y ,

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3).$$

(b) On a :

$$(E) \Leftrightarrow \left| \sum_{j=1}^3 v_j \right| = \sum_{j=1}^3 |v_j| \Leftrightarrow (|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 0$$

Or, avec la question 1, $|v_jv_{j'}| - v_jv_{j'} \geq 0$.Donc, (somme nulle de termes positifs ou nuls) pour tout $j \neq j'$, $|v_jv_{j'}| - v_jv_{j'} = 0$ et donc $|v_jv_{j'}| = v_jv_{j'}$.Donc, si $|v_jv_{j'}| > 0$ avec $j \neq j'$, alors $v_jv_{j'} > 0$ et donc v_j et $v_{j'}$ ont même signe.(c) Si un des v_j est non nul, tous les autres seront du même signe (d'après la question précédente) ou nul. Donc tous les coefficients de V ont même signe. Donc $V = |V|$ (s'ils sont tous positifs) ou $V = -|V|$ (s'ils sont tous négatifs).

3. On généralise la méthode précédente :

• On a :

$$\left(\sum_{i=1}^N |v_i| \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^N v_i \right)^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|v_iv_j| - v_iv_j).$$

• Avec (E), on a donc

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|v_iv_j| - v_iv_j) = 0$$

et donc (avec la question 1), pour tout $i \neq j$, $|v_iv_j| = v_iv_j$ (somme nulle de termes positifs).• Pour tout $i \neq j$, $v_iv_j = |v_iv_j| \geq 0$ donc v_i et v_j sont de même signe. Ainsi, tous les coefficients de V sont de même signes et donc $V = |V|$ (s'ils sont tous positifs) ou $V = -|V|$ (s'ils sont tous négatifs).4. Pour tout i et j , $A(i, j) \geq 0$ et $\frac{(1-\rho)}{N} > 0$ car $\rho \in [0, 1[$ donc $\rho A(i, j) + \frac{(1-\rho)}{N} > 0$ Donc G est une matrice strictement positive.

5. Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $d_j = 0$, alors $A(i, j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j, j) = 1$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N G(i, j) &= \sum_{i \neq j}^N G(i, j) + G(j, j) \\ &= \sum_{i \neq j}^N \frac{(1-\rho)}{N} + \rho + \frac{(1-\rho)}{N} \\ &= \frac{(1-\rho)}{N} (N-1) + \rho + \frac{(1-\rho)}{N} \\ &= 1 - \rho + \rho \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $d_j > 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N G(i, j) &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} G(i, j) + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} G(i, j) \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \left(\frac{\rho}{d_j} + \frac{(1-\rho)}{N} \right) + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} \frac{(1-\rho)}{N} \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \frac{\rho}{d_j} + \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} \frac{(1-\rho)}{N} \\ &= \frac{\rho}{d_j} d_j + \frac{(1-\rho)}{N} N \quad (\text{car la page } j \text{ pointe vers } d_j \text{ autres pages}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

7. G est donc une matrice stochastique.

8. $\sum_{j=1}^N G(i, j) p(j)$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de G est de la colonne

$$C = \begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$$

donc la $i^{\text{ème}}$ ligne de ce produit.

Donc si une telle colonne existe, alors $\sum_{j=1}^N G(i, j) p(j) = p(i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. signifie que

$$GC = C$$

Donc ce vecteur est invariant par G .

9. On note V_n le vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante est définie par $(v_n)_i = P(X_n = i)$.

On a pour tout i : $(v_n)_i = P(X_n = i) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^N P(X_n = i) = 1$ donc $|V_n| = 1$.

V_n est bien un vecteur de probabilité.

10. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2$, on a avec la formule des probas composées :

$$P(X_n = i \cap X_{n-1} = j) = P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i) P(X_{n-1} = j) = G(i, j) (v_{n-1})_j$$

11. Comme $(X_{n-1} = j)_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est un système complet d'événements,

$$P(X_n = i) = \sum_{j=1}^N P(X_n = i \cap X_{n-1} = j) = \sum_{j=1}^N G(i, j) (v_{n-1})_j$$

On reconnaît la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit de G et de V_{n-1} . Donc $V_n = GV_{n-1}$.

12. Par récurrence (laissée au lecteur).

13. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors

$$QV = V \iff \begin{cases} (1-q)x + q'y = x \\ qx + (1-q')y = y \end{cases} \iff \begin{cases} -qx + q'y = 0 \\ qx - q'y = 0 \end{cases} \iff x = \frac{q'}{q}y$$

Les invariants de Q sont $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix} \right)$.

14. Pour qu'un vecteur invariant $\alpha \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$ soit de probabilité, il faut et il suffit que $\alpha q + \alpha q' = 1$ et $\alpha \geq 0$. Donc

$$V_\infty = \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$$

est l'unique vecteur de probabilité $V_\infty \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ invariant par Q .

15. Par récurrence :

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^1}{q + q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q + q'} \left[\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + (1-q-q') \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q + q' - qq' - q^2 & (q')^2 + qq' \\ q^2 + q'q & q + q' - qq' - (q')^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (q + q') Q &= (q + q') \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q + q' - qq' - q^2 & (q')^2 + qq' \\ q^2 + q'q & q + q' - qq' - (q')^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$Q = \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^1}{q + q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$Q^n = \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q + q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}.$$

alors

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \left[\frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car les colonnes de $\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$ sont invariantes par Q .

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} q(1-q) - qq' & qq' + q'(q'-1) \\ qq' + q(q-1) & -qq' - q'(q'-1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} (1-q-q') \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc la propriété est bien vraie pour tout entier $n \geq 1$.

16. Donc quand n tend vers $+\infty$,

$$Q^n \rightarrow \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$$

car $|1-q-q'| < 1$, matrice dont les deux vecteurs colonnes sont égaux à V_∞ .

17. On note U le vecteur élément de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent 1.

Chaque ligne de tQU est la somme des termes des lignes de tQ (donc la somme des colonnes de Q) et vaut donc 1. Donc ${}^tQU = U$.

18. Si $Q - I_N$ est inversible d'inverse R , alors $({}^tQ - I_N) \cdot ({}^tR) = {}^t(R(Q - I_N)) = I$.

Donc tR est l'inverse de ${}^tQ - I_N$. Ainsi, si $Q - I_N$ est inversible, alors ${}^tQ - I_N$ l'est aussi.

19. Comme ${}^tQU = 1U$ avec $U \neq 0$, alors 1 est valeur propre de tQ .

Donc ${}^tQ - I_N$ n'est pas inversible donc $Q - I_N$ non plus (contraposée de la proposition précédente) et donc 1 est valeur propre de Q .

20. Si $\lambda = 1$ alors $QV = V$ et dans chaque ligne, $\sum_j Q_{i,j}v_j = v_i$ donc

$$|v_i| = \left| \sum_j Q_{i,j}v_j \right| \leq \sum_j |Q_{i,j}v_j| = \sum_j Q_{i,j} |v_j|$$

donc

$$\sum_j Q_{i,j} |v_j| - |v_i| \geq 0$$

et de même si $\lambda = -1$ car $|-v_i| = |v_i|$.

$Q|V| - |V|$ est positif si V est vecteur propre de Q associé à 1.

21. La somme des composantes de $Q|V|$ est $\sum_i \sum_j Q_{i,j} |v_j|$.

En inversant les sommes, on a :

$$\sum_i \sum_j Q_{i,j} |v_j| = \sum_j |v_j| \sum_i Q_{i,j} = \sum_j |v_j| = |V|$$

Donc la somme des termes de $Q|V| - |V|$ est nulle.

Chacun de ces termes étant positif ou nul (question 20), ils sont tous nuls et $Q|V| - |V| = 0$.

Ainsi, $|V|$ est invariant par Q .

22. On sait que 1 est valeur propre de Q (question 19). Soit V un vecteur propre associé. D'après la question 21, $|V|$ est invariant par Q . Alors le vecteur

$$W = \frac{1}{\|V\|} |V|$$

sera un vecteur de probabilité (positif et $\|W\| = 1$) invariant par Q . Il existe donc au moins un vecteur de probabilité invariant par Q .

23. Soit V est un vecteur positif invariant par Q .

Supposons que la $i^{\text{ème}}$ composantes soit nulle. Alors dans le produit $QV = V$, la $i^{\text{ème}}$ ligne est nulle. Et comme elle somme $\sum_j Q(i, j) v_j$ de termes positifs ou nuls, tous les termes $Q(i, j) v_j$ de la ligne sont nuls.

Comme $Q(i, j) \neq 0$ donc $v_j = 0$ pour tout j .

Si un coefficient est nuls, ils le sont tous.

Ainsi, soit $V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$, soit V est strictement positif.

24. Comme V_∞ est vecteur de probabilité, il n'est pas nul, et c'est un vecteur invariant positif. V_∞ est donc strictement positif (d'après la question précédente).

25. Le sous-espace propre associé à 1 est un sous espace vectoriel. Donc $W_\infty - \alpha V_\infty$ en est encore élément. Donc V est invariant par Q .

26. La $i_0^{\text{ème}}$ composante de V est :

$$(w_\infty)_{i_0} - \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} (v_\infty)_{i_0} = 0$$

Et pour tout i , on a : $\frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \geq \alpha$ donc la $i^{\text{ème}}$ est

$$(w_\infty)_i - \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} (v_\infty)_i \geq (w_\infty)_i - \frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} (v_\infty)_i = 0$$

Ainsi, V est positif mais pas strictement positif.

27. Un vecteur invariant positif est soit nul soit strictement positif (question 23). Donc V est nul et donc $W_\infty = \alpha V_\infty$.

28. Comme W_∞ et V_∞ sont des vecteurs de probabilité,

$$1 = \sum_i |(w_\infty)_i| = \sum_i \alpha |(v_\infty)_i| = \alpha$$

d'où $\alpha = 1$ et $W_\infty = V_\infty$. Il existe donc un unique vecteur de probabilité invariant.

29. Le système (S) est :

$$\sum_{j=1}^N p(j) = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^N G(i, j) p(j) = p(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N. \tag{S}$$

avec $V = (p(j))_j$ qui est donc un vecteur de probabilité et $\sum_{j=1}^N G(i, j) p(j)$ qui est la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit GV .

Donc les solutions du système (S) sont les vecteurs de probabilité invariants.

On en a montré l'existence et l'unicité.

(S) définissant le PageRank admet bien une et une seule solution.

30. On avait $G(i, j) = \rho A(i, j) + \frac{(1 - \rho)}{N} \geq \frac{(1 - \rho)}{N}$ et

$$p(i) = \sum_{j=1}^N G(i, j) p(j) \geq \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \rho)}{N} p(j) = \frac{(1 - \rho)}{N} \sum_{j=1}^N p(j)$$

Comme $(p(j))_j$ est un vecteur de probabilité, la somme des probabilités est 1

Ainsi, $p(i) \geq (1 - \rho) / N$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

31. Le rôle du paramètre ρ est essentiel pour assurer l'unicité de la solution du système (S).

Pour $\rho = 1$, la probabilité de rester sur une page sans lien serait de 1. On aurait alors $G(i, j) = A(i, j) = I_N$ et on aurait donc une infinité de solution à (S).

32. Pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de QV est $\sum_{j=1}^N Q(i, j) v_j$ et

$$\left| \sum_{j=1}^N Q(i, j) v_j \right| \leq \sum_{j=1}^N Q(i, j) |v_j|$$

avec $Q(i, j) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \|QV\|_1 &= \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N Q(i, j) v_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N Q(i, j) |v_j| = \sum_{j=1}^N |v_j| \sum_{i=1}^N Q(i, j) \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^N Q(i, j) = 1$ (matrice stochastique). Finalement, $\|QV\|_1 \leq \|V\|_1$.

Si V est positif, $\left| \sum_{j=1}^N Q(i, j) v_j \right| = \sum_{j=1}^N Q(i, j) v_j$ d'où

$$\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q(i, j) v_j = \sum_{j=1}^N |v_j| \sum_{i=1}^N Q(i, j)$$

$\|QV\|_1 = \|V\|_1$ lorsque V est positif.

33. Soit λ une valeur propre de Q et V un vecteur propre associé.

On a alors $QV = \lambda V$ et $\|QV\|_1 = |\lambda| \|V\|_1$ (λ se factorise dans la somme) donc

$$\|QV\|_1 = |\lambda| \|V\|_1 \leq \|V\|_1.$$

Comme $\|V\|_1 > 0$, on obtient en divisant par cette quantité l'inégalité que $|\lambda| \leq 1$.

34. $|V|$ est un vecteur de probabilités invariant par Q . Donc $QV = V$ et pour la première composante :

$$\sum_{j=1}^N Q(1, j) |v_j| = |v_1|.$$

Comme V est associé à λ :

$$\sum_{j=1}^N Q(1, j) v_j = \lambda v_1$$

donc (comme $|\lambda| = 1$)

$$\left| \sum_{j=1}^N Q(1, j) v_j \right| = |\lambda v_1| = |\lambda| |v_1| = |v_1|.$$

Finalement, $\left| \sum_{j=1}^N Q(1, j) v_j \right| = |v_1| = \sum_{j=1}^N Q(1, j) |v_j|.$

35. Les $Q(1, j)$ sont tous strictement positifs. Donc, avec la question précédente,

$$\left| \sum_{j=1}^N Q(1, j) v_j \right| = \sum_{j=1}^N |Q(1, j) v_j|$$

Avec la question 3, tous les $Q(1, j)v_j$ sont de même signe donc (comme les $Q(1, j)$ sont tous strictement positifs) tous les v_j sont de même signe et $V = \pm |V|$.

Le sous espace propre associé à 1 étant un espace vectoriel, V en est également élément. Donc V est associé à a valeur propre 1 et donc $\lambda = 1$.

36. Comme Q est diagonalisable, il existe une matrice S inversible et une matrice D diagonale telles que $Q = SDS^{-1}$.

On peut imposer que la première colonne de S soit V_∞ et donc le premier terme diagonal de D soit 1.

Et par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $Q^n = SD^nS^{-1}$.

37. On a vu que les valeurs propres de Q étaient toutes inférieures ou égales à 1, et que -1 ne l'était pas.

De plus, si V est un vecteur propre associé à 1 alors $\frac{1}{\|V\|}V$ sera proportionnel à V_∞ (question 35). Donc V également et le sous espace associé à la valeur propre 1 sera engendré par V_∞ .

Ainsi, le sous-espace associé à 1 est de dimension 1.

Donc, parmi les N coefficients diagonaux de D un et un seul (le premier) est égal à 1 alors que tous les autres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

38. Avec $|x| < 1$, on a $x^n \rightarrow 0$. Donc D^n converge donc vers D_∞ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le premier qui vaut 1.

Donc Q^n convergera vers $SD_\infty S^{-1} = Q_\infty$.

39. Le produit de deux matrices à coefficients positifs est une matrice à coefficients positifs.

Si les colonnes de $Q^n = (r_{i,j})$ ont pour somme 1 alors $QQ^n = \left(\sum_{k=1}^N q_{i,k} r_{k,j} \right)_{i,j}$ avec la somme

des termes de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N q_{i,k} r_{k,j} &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N q_{i,k} r_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^N r_{k,j} \sum_{i=1}^N q_{i,k} \end{aligned}$$

et $\sum_{i=1}^N q_{i,k} = 1$ somme des termes de la $k^{\text{ième}}$ colonne de Q donc

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N q_{i,k} r_{k,j} = \sum_{k=1}^N r_{k,j} = 1$$

somme des termes de la $k^{\text{ième}}$ colonne de Q^n .

D'où par récurrence, pour tout entier n , Q^n est positive et la somme des termes de chaque colonne vaut 1.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, Q^n est stochastique puis que Q_∞ est stochastique.

40. On a $QQ^n = Q^{n+1}$ avec Q^n et Q^{n+1} qui tendent vers Q^∞ .

Donc par passage à la limite (la limite d'une somme de N termes), $QQ_\infty = Q_\infty$.

41. En regardant le produit QQ_∞ colonne par colonne, on a donc $QC_j = C_j$ pour chaque colonne de Q . Donc chaque colonne de Q_∞ est invariante par Q .

42. Chaque colonne est invariante par Q et la somme des termes de chaque colonne (positifs) vaut 1. Donc chaque colonne est un vecteur de probabilité invariant : c'est donc V_∞

Ainsi, Q_∞ a pour vecteurs colonnes V_∞ .

43. Avec $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$, la formule des probabilités totales donne $V_{n+1} = QV_n$ pour tout entier n .

Donc (par récurrence) $V_n = Q^n V_0$ qui tend vers $Q_\infty V_0 = V_\infty$ (car la somme des coefficients de V_0 vaut 1).

Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = p(k) = P(X_\infty = k)$.

Ainsi, $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X_∞ lorsque n tend vers l'infini.

44. Le page rank est donc la probabilité asymptotique de se retrouver sur une page lorsqu'il surf indéfiniment.