Révisions 2

Correction du sujet ECRICOME

Exercice 1 (ECRICOME 2017)

1. On a :

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = (A-I)^2(A-I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisque $(A-I)^3$ est la matrice nulle, le polynôme $(X-1)^3 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Par le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme, soit ici :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

Par ailleurs, 1 est valeur propre de A car la matrice $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (les deux premières colonnes sont opposées donc colinéaires).

Par conséquent :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.$$

3. La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre.

Elle n'est pas diagonalisable car, si elle l'était, elle serait semblable à une matrice diagonale où les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, donc tous égaux à 1 ; autrement dit, A serait semblable à I donc égale à I, ce qui est absurde.

En effet, si A est semblable à I, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = I$, donc $A = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

4. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de :

- la fonction polynomiale $x \mapsto 1+x$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$
- et de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Il est important de noter que $1+x$ ne s'annule pas sur l'intervalle considéré (ouvert en -1) car la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ (ni même dérivable) en 0.

On dérive deux fois φ pour obtenir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad ; \quad \varphi''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

et donc :

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

5. La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 (sur un intervalle ouvert contenant 0), elle y admet un développement limité à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young :

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \underbrace{\varphi'(0)}_{=\frac{1}{2}} x + \underbrace{\frac{\varphi''(0)}{2}}_{=-\frac{1}{8}} x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Le réel α recherché vaut donc $-\dfrac{1}{8}$.

6. On a :

$$\big(P(x)\big)^2 \quad = \quad \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)=1+x-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}$$

7. On obtient donc :

$$\big(P(C)\big)^2 = P^2(C) = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A,$$

en utilisant que $C^3 = 0$ (question 1) et donc aussi $C^4 = 0$.

La matrice $M = P(C)$ vérifie donc bien $M^2 = A$, et :

$$\begin{aligned} M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6&6&0\\-6&6&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1&4\\1&3&4\\-6&6&4\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. (a) En notant U, V et W les vecteurs-colonnes correspondant respectivement à u, v et w, les relations $v = f(w) - w$ et $u = f(v) - v$ se traduisent ainsi :

$$V = AW - W = CW = \begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$U = AV - V = CV = \begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

et on a donc : $v = (1, 1, -3)$ et $u = (-6, -6, 0)$.

(b) Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, montrer que la famille de trois vecteurs (u, v, w) est une base revient à prouver qu'elle est libre.

$$au + bv + cw = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + b + c &= 0 \\ -6a + b &= 0 \\ -3b + c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + b + c &= 0 \\ -6a + b &= 0 \\ -3b + c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0,$$

en faisant le pivot... (u, v, w) est donc libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Calculons $f(u)$ en utilisant la matrice A :

$$AU = \begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&2\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

donc $f(u) = u$ (u est un vecteur propre de f associé à l'unique valeur propre 1).

Les relations de l'énoncé nous donnent directement $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaisons linéaires de u, v et w :

$$f(v) = u + v \quad ; \quad f(w) = v + w.$$

On en déduit la matrice de f dans la base (u, v, w) :

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array} = T$$

(d) Puisque A et T représentent l'endomorphisme f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement, en notant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (donc inversible), on a :

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \quad \text{et donc} \quad P^{-1}AP = T.$$

9. (a) Supposons que $N^2 = T$. Alors :

$$NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN.$$

En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la relation $NT = TN$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}}$$

ce qui nous donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ a & = & e \\ b & = & f \\ g & = & 0 \\ d & = & h \\ e & = & i \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = e = i \\ d = g = h = 0 \\ b = f \end{array}\right.$$

Par conséquent, si $N^2 = T$, alors N est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Si $N^2 = T$, alors avec les notations de la question précédente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & \frac{1}{2} \\ c & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

On obtient donc deux solutions possibles :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = -N_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie qu'il s'agit effectivement de solutions à l'équation (${N_1}^2 = {N_2}^2 = T$).

10. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En posant $N = P^{-1}MP$, on a :

$$M^2 = A \Leftrightarrow \left(PNP^{-1}\right)^2 = A \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = A \Leftrightarrow N^2 = P^{-1}AP \Leftrightarrow N^2 = T$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement deux solutions :

$$M_1 = PN_1P^{-1} \quad \text{et} \quad M_2 = PN_2P^{-1} \ (= -M_1).$$

11. La matrice nulle n'étant pas solution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 (ECRICOME 2020)

1. La fonction

$$g_n : t \mapsto \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc g_n admet une primitive G_n sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \geq 0$:

$$f_n(x) = [G_n(t)]_0^x = G_n(x) - G_n(0).$$

Comme G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f_n'(x) = G_n'(x) = g_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.$$

2. Le signe de $f_n'(x)$ est donné par celui de son numérateur. Or,

$$x^{2n} - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x^{2n} \geq 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1 \quad \text{car } x \in \mathbb{R}_+.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n.

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	

3. f_n' est quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc f_n' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et f_n est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n} - 1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}.$$

Il est clair que, pour tout $x \geq 0$, $f_n''(x) \geq 0$ (le numerateur est somme de multiplies positifs de puissances de x; le dénominateur est un carré). Ainsi, f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. (a) On peut montrer ce résultat de plusieurs manières; on choisit ici une preuve relativement élégante. Si $x > 1$, observons que

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

ce qui donne $x^n - 1 \geq n(x-1)$ pour tout $x > 1$. Cette inégalité s'étend naturellement à $x = 1$ (les deux membres sont nuls). En l'appliquant à $x = t^2$ (si $t \geq 1$, on a bien $t^2 \geq 1$), on a l'inégalité voulue.

(b) Comme $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, on a, pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{t^{2n} - 1}{t+1} \geq n(t-1)$$

Soit $x \geq 1$. Par positivité de l'intégrale et par la relation de Chasles

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t \\ &\geq f_n(1) + n \int_1^x (t-1) \mathrm{d}t \\ &= f_n(1) + n \left[\frac{(t-1)^2}{2} \right]_1^x \\ &= f_n(1) + n \frac{(x-1)^2}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

(c) Lorsque $x \to +\infty$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers $+\infty$. Par théorème de comparaison, on peut conclure que

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

5. Comme $f_n(0) = 0$ et que f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$, il suit que $f_n(1) < f_n(0) = 0$.

6. Chercher les solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ revient à chercher les antécédents de 0 par f_n.

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est strictement décroissante sur $]0;1]$ et y réalise donc une bijection (par le théorème du même nom) vers $[f_n(1);0[$. Cet intervalle ne contient pas 0 qui n'admet donc aucun antécédent par f_n sur $]0;1]$.

D'autre part, f_n est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et réalise donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]f_n(1);+\infty[$, qui cette-fois contient 0. Ainsi, 0 admet un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}_+$ et cet antécédent est strictement supérieur à 1. On le note x_n :

$$f_n(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_n.$$

7. Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-1}{t+1} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-t^{2n}}{t+1} \mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n}(t^2-1)}{t+1} \mathrm{d}t = \int_0^x t^{2n}(t-1) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right), \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8. (a) Soit $x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$. Alors $\dfrac{x}{2n+2} \geq \dfrac{1}{2n+1}$ donc $\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geq 0$.
D'après la question précédente, on a donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

   (b) On applique le résultat précédent à $x = x_n$ (ce qui est licite par l'"hypothèse admise en début de partie). Ainsi,
$$f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0.$$

   (c) Comme f_{n+1} est bijective et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et que x_n et x_{n+1} en sont éléments, on a
$$f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \Longrightarrow x_n \geq x_{n+1}$$
et la suite (x_n) est décroissante. Celle-ci étant également minorée par 1, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge, vers une certaine limite (que l'on peut noter ℓ) vérifiant $\ell \geq 1$.

9. (a) On sait déjà que $f_n(1) \leq 0$. Montrons que $f_n(1) \geq -\ln(2)$. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a $t^{2n} - 1 \geq -1$. Il suit (comme $t + 1 \geq 0$) que
$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{-1}{t+1}$$
puis, par positivité de l'intégrale,
$$f_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{(-1)}{t+1}\mathrm{d}t = -[\ln(1+t)]_0^1 = -\ln(2),$$
ce qui donne bien ce qu'on voulait.

   (b) On applique l'inégalité obtenue en **??** à $x = x_n$. D'après la question précédente, $0 \leq -f_n(1) \leq \ln(2)$ et on obtient
$$(x_n - 1)^2 \leq \frac{2}{n}\left(f_n(x_n) - f_n(1)\right) = -\frac{2}{n}f_n(1) \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$
Comme on sait que $x_n \geq 1$ (et donc $x_n - 1 \geq 0$) ceci donne bien, en prenant la racine qui est une fonction croissante
$$0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$
Le membre de droite tend clairement vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème d'encadrement, on a $x_n - 1 \to 0$, $n \to +\infty$, ce qui permet de conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

10. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiales) et donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par composition avec la fonction f_n de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $(x, y) \mapsto f_n(x)$ et $(x, y) \mapsto f_n(y)$ sont aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et par produit c'est encore le cas de G_n.
On a alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
$$\begin{aligned}
\partial_1 G_n(x,y) &= f_n(y) \times f_n'(x) = \left(\int_0^y \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{x^{2n}-1}{x+1} \\
\partial_2 G_n(x,y) &= f_n(x) \times f_n'(y) = \left(\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{y^{2n}-1}{y+1}
\end{aligned}$$

11. On résout

$$(x,y) \text{ point critique de } G_n \iff \left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 G_n(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 G_n(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} f_n(x)f_n'(y) & = & 0 \\ f_n(y)f_n'(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, f_n ne s'annule qu'en x_n et f_n' ne s'annule qu'en 1 (et $x_n \neq 1$ donc f_n et f_n' ne peuvent s'annuler en même temps). Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_n(x)f_n'(y) & = & 0 \\ f_n(y)f_n'(x) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f_n(x) & = & 0 \\ f_n(y) & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} f_n'(y) & = & 0 \\ f_n'(x) & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_n \\ y & = & x_n \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

Ainsi, G_n admet deux points critiques: (x_n, x_n) et $(1,1)$.

12. On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{array}{lcl} \partial^2_{1,1} G_n(x,y) & = & f_n(y)f_n''(x) \\ \partial^2_{1,2} G_n(x,y) & = & \partial^2_{2,1} G_n(x,y) = f_n'(x)f_n'(y) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1} \times \dfrac{y^{2n}-1}{y+1} \\ \partial^2_{2,2} G_n(x,y) & = & f_n(x)f_n''(y) \end{array}$$

On forme alors les matrices hessiennes (on rappelle que $f_n(x_n) = 0$ et que $f_n'(1) = 0$). De plus, observant que

$$f_n'(x_n)^2 = \left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2,$$

et

$$f_n''(1) = n$$

on peut écrire

$$\nabla^2(G_n)(x_n, x_n) = \left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

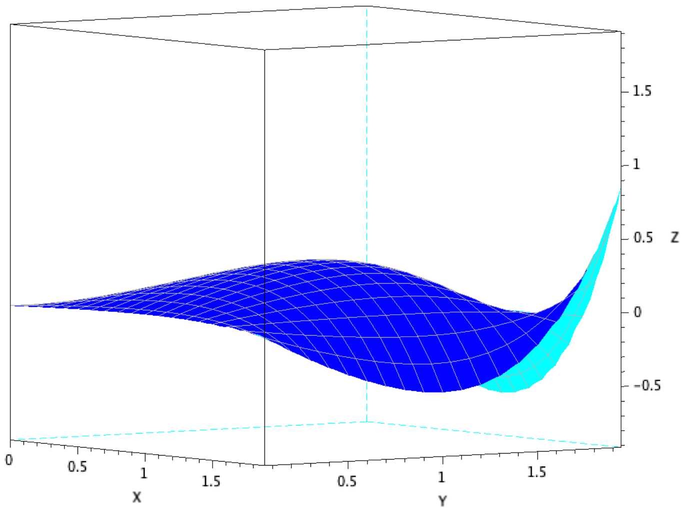
et

$$\nabla^2(G_n)(1,1) = nf_n(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Les valeurs propres de $\nabla^2(G_n)(x_n, x_n)$ sont de même signe que celle de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le spectre est $\mathrm{Sp}(M) = \{1, -1\}$ (qu'on obtient en résolvant $\lambda^2 - 1 = 0$ correspondant au fait que $M - \lambda I_2$ ne soit pas inversible). Les deux valeurs propres sont de signes opposés; G_n présente un point selle en (x_n, x_n).

14. En $(1,1)$, la hessienne est déjà diagonale, ses valeurs propres (qui sont ses coefficients diagonaux) sont strictement négatives (car $nf_n(1) < 0$ car $f_n(1) < 0$). Ainsi, G_n présente un maximum local en $(1,1)$ (ce maximum vaut $G_n(1,1) = f_n(1)^2$).

On ne résiste pas, pour le plaisir des yeux, à l'envie de joindre une représentation de la surface $z = G_n(x,y)$ pour $n = 2$ sur $]0;2]\times]0;2]$ obtenue avec `Python`.



Exercice 3 (ECRICOME 2020)

1. L'intégrale $I_n(a)$ est impropre en $+\infty$. Soit $X > a$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_a^X \\ &= \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)X^{n-1}} \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}},\end{aligned}$$

car $n-1>0$ (car $n \geq 2$). Ainsi, l'intégrale $I_n(a)$ converge et $I_n(a) = \dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. (a) On montre que f est bien une densité de probabilité.
   - f est continue partout sauf en a.
   - f est positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$.
   - L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de f converge et vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 3a^3 I_4(a) = 1.$$

   Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

   (b) La fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

   Comme f est nulle sur $]-\infty; a[$, il est clair que $F_X(x) = 0$ pour $x < a$. Si $x \geq a$, un calcul similaire à celui fait à la question 1 donne $F_X(x)$. Au final, on peut écrire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

   (c) Par définition,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3}\mathrm{d}t \text{ converge.}\end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_3(a)$ qui converge. Donc X admet une espérance et

$$E(X) = 3a^3 I_3(a) = \frac{3a}{2}.$$

(d) Par Koenig-Huyguens,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une variance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_2(a)$ qui converge. Donc X admet (un moment d'ordre 2 et donc) une variance et

$$E(X^2) = 3a^3 I_2(a) = 3a^2.$$

On obtient alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} U(\Omega) =]0,1] &\Rightarrow (U^{1/3})(\Omega) =]0,1] \quad (\text{car } x \mapsto x^{1/3} \text{ est continue et croissante de }]0,1] \text{ dans }]0,1]) \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{U^{1/3}}\right)(\Omega) = [1, +\infty[\quad (\text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est continue et décroissante de }]0,1] \text{ dans } [1, + \\ &\Rightarrow Y(\Omega) = [a, +\infty[\quad (\text{en multipliant par } a > 0) \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, $F_Y(x) = 0$ si $x < a$. Soit donc $x \geq a$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P\left(a \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(U)\right) \leq x\right) \\ &= P\left(U \geq \exp\left(-3\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) \\ &= 1 - F_U\left(\exp\left(-3\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) = 1 - F_U\left(\frac{a^3}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Or, si $x \geq a$, $a^3/x^3 \in]0;1]$ et donc $F_U(a^3/x^3) = a^3/x^3$. Au final, on obtient, pour $x \geq a$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^3}{x^3}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

ou encore $F_Y(x) = F_X(x)$, et on peut conclure que X et Y suivent la même loi.

(c) On va simuler la loi de X en simulant Y via *inversion* avec la formule précédente, à partir de la loi uniforme avec une opération pointée.

```python
def simulX(a, m, n):
    U = rd.random([m, n])
    Y = a*U**(-1/3)
    return(Y)
```

4. (a) On utilise la fonction de répartition

$$P(X > 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{1}{8}.$$

(b) La définition de probabilité conditionnelle donne

$$P_{[X>2a]}(X>6a)=\frac{P([X>6a]\cap[X>2a])}{P(X>2a)}=\frac{P(X>6a)}{P(X>2a)}=\frac{1-(1-a^3/(6a)^3)}{1/8}=\frac{8}{6^3}=\frac{1}{27}.$$

(c) L'idée est alors simuler un assez grand échantillon de X (ici $N=10000$) et de compter (avec la variable `s1`) le nombre des réalisations de X pour lesquelles le résultat est strictement plus grand que $2a$. Parmi ces réalisations, on compte (avec la variable `s2`) celles qui sont strictement supérieures à $6a$). Le quotient des fréquences, qui est aussi égal au quotient `s2/s1` donne une estimation de la probabilité conditionnelle cherchée (seulement si `s1` >0 sinon on diviserait par 0 mais dans ce cas la probabilité conditionnelle n'a pas de sens).

```
a = 10
N = 10000 #taille de l'é chantillon
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N) #échantillon de X de taille N
    for k in range(1, N+1):
        if X(k) > 2*a:
                s1 = s1+1 #nbre de réalisations de X qui sont
 > 2a
                if X(k) >6*a:
                        s2 = s2+1
if s1>0:
    print(s2/s1)
```

5. (a) La variable aléatoire V_n est une fonction de l'échantillon dont la loi dépend de a; c'est donc un estimateur de a.

(b) On calcule son espérance. Par linéarité de celle ci, et comme les X_k ont toutes pour espérance $E(X)=3a/2$, on a

$$E(V_n)=\frac{2}{3n}E(X_1+...+X_n)=\frac{2}{3n}\times n\times\frac{3a}{2}=a$$

On dit que V_n est bien un estimateur sans biais de a.
On calcule sa variance.

$$\begin{aligned}
V(V_n) &= V\left(\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\\
&= \frac{4}{9n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right) \qquad \text{(prop de la variance)}\\
&= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n}V(X_k) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)}\\
&= \frac{4}{9n^2}\times n\times V(X)=\frac{4}{9n}\frac{3a^2}{4}\\
&= \frac{a^2}{3n}.
\end{aligned}$$

6. (a) On pose $W_n=\min(X_1,...,X_n)$.

$$\begin{aligned}
F_{W_n}(x) &= P(W_n\le x)=1-P(\min(X_1,...,X_n)>x)\\
&= 1-P([X_1>x]\cap[X_2>x]\cap...\cap[X_n>x])\\
&= 1-P(X_1>x)P(X_2>x)...P(X_n>x) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)}\\
&= 1-(1-F_X(x))^n
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - \dfrac{a^{3n}}{x^{3n}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

La fonction de répartition de W_n est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier au point de raccordement a et est de classe $\mathcal{C}^1$ partout sauf en a (les *morceaux* sont des combinaisons d'inverses de fonctions polynomiales qui ne s'annulent pas), W_n est bien une variable aléatoire à densité.

(b) Une densité de W_n est obtenue en dérivant F_{W_n} en dehors de a (et en prenant en $t = a$ une valeur arbitraire). En particulier,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{x^{3n+1}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

(c) Par définition,

$$\begin{aligned} W_n \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n}}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_{3n}(a)$ qui converge. Donc W_n admet une espérance et

$$E(W_n) = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\frac{3n-1}{3n}W_n\right) = a,$$

donc il suffit donc de prendre $\lambda_n = \dfrac{3n}{3n-1}$ pour obtenir un estimateur sans biais de a.

(d) Pour calculer la variance de $\lambda_n W_n$, on a besoin de la variance de W_n et donc de son moment d'ordre 2. Par König-Huyguens,

$$\begin{aligned} W_n \text{ admet une variance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n-1}}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_{3n-1}(a)$ qui converge. Donc W_n admet (un moment d'ordre 2 et donc) une variance et

$$E(W_n^2) = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = \frac{3n}{3n-2}a^2$$

On obtient alors

$$V(W_n) = E(W_n^2) - E(W_n)^2 = \left(\frac{3n}{3n-2} - \frac{(3n)^2}{(3n-1)^2}\right)a^2 = \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}a^2$$

et enfin

$$V(\lambda_n W_n) = \lambda_n^2 V(W_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}a^2 = \frac{a^2}{3n(3n-2)}.$$

7. (a) On complète sans difficulté. Chacune des m lignes de `X` est un $n-$échantillon de X.

```python
def simulV(a, m, n)
    X = simulX(a, m, n)
    V = np.zeros(1, m)
    for k in range(m):
        V[k] = 2/(3*n)*np.sum(X[k, :])
    return(V)
```

(b) Parmi les deux suites représentées, l'une semble être très proche de 5 et l'autre oscille autour de 5. Comme chacune de ces deux suites semblent représenter les réalisations des deux estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$ de a, on peut comprendre qu'on a pris $a = 5$. On a 20 points de chaque donc $m = 20$.

Les questions précédentes ont permis de voir, via le calcul de l'espérance et de la variance que $\lambda_n W_n$ était un meilleur estimateur de a, ce qui nous permet de comprendre que la suite représentée avec des $+$ correspond aux termes de $(\lambda_n W_n)$ alors que la suite représentée avec des $\times$ est (V_n). On peut donc compléter le programme :

```python
W = simulW(5, 20, 100)
V = simulV(5, 20, 100)
n = np.arange(1, 21, 1)
plt.plot(n, W, "+")
plt.plot(n, V, "x")
```