Révisions 2

Correction du sujet ESSEC

1. (a) La restriction de h au segment $[x;y]$ est continue sur ce segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Il existe donc un réel α_y dans ce segment tel que :

$$h(\alpha_y) = \max_{t\in[x;y]} h(t) = M(x,y)$$

   (b) On remarque que $\alpha_y \in [x;y]$ c'est-à-dire :

$$x \leq \alpha_y \leq y$$

   et par encadrement on en déduit immédiatement que :

$$\lim_{y\to x^+} \alpha_y = x.$$

   Alors par continuité de la fonction h et composée de limites, on obtient :

$$\lim_{y\to x^+} M(x,y) = \lim_{y\to x^+} h(\alpha_y) = h(x).$$

   (c) On effectue le même raisonnement avec y fixé et x qui tend vers y : on fixe donc $y \in I$, pour tout $x \in]a;y[$ la restriction de h au segment $[x;y]$ admet un maximum, forcément atteint sur le segment donc en au moins un point β_x qui vérifie donc :

$$x \leq \beta_x \leq y \quad \text{et} \quad h(\beta_x) = M(x,y)$$

   On fait alors tendre x vers y par valeurs inférieures : par encadrement on obtient que

$$\lim_{x\to y^-} \beta_x = y$$

   puis par composée et continuité de h :

$$\lim_{x\to y^-} M(x,y) = \lim_{x\to y^-} h(\beta_x) = h(y).$$

2. (a) On suppose que le premier évènement est réalisé, c'est-à-dire que $x < X \leq y$ est réalisé **et que** (intersection) $U \leq h(X)$ est réalisé.

   Montrons alors que le second est réalisé : la première partie $x < X \leq y$ l'est trivialement, et pour la seconde : comme $X \in [x;y]$, par définition du minimum et du maximum sur le segment $[x,y]$,

$$m(x,y) \leq h(X) \leq M(x,y)$$

   Or on sait que $U \leq h(X)$, donc on obtient que $U \leq h(X) \leq M(x,y)$. Les évènements

$$(x < X \leq y) \quad \textbf{et} \quad (U \leq M(x,y))$$

   dont donc réalisés, donc leur intersection est réalisée. On a donc prouvé que la réalisation du premier évènement entraîne celle du second, donc :

$$[(x < X \leq y) \cap (U \leq h(X))] \subset [(x < X \leq y) \cap (U \leq M(x,y))].$$

On peut alors remarquer que :

$$\begin{array}{rcl}\Psi(y)-\Psi(x) & = & P[(X\leq y)\cap(U\leq h(X)]-P[(X\leq x)\cap(U\leq h(X)]\\ & = & P[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]\end{array}$$

En effet considérons les évènements $[(X\leq x)\cap(U\leq h(X)]$ et $[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]$: ils sont incompatibles (X ne peut être en même temps strictement supérieur à x et inférieur ou égal à x, et leur réunion est :

$$\begin{array}{rl} & [(X\leq x)\cap(U\leq h(X)]\cup[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]\\ = & [(X\leq x)\cup(x<X\leq y)]\cap[U\leq h(X)]\\ = & [X\leq y]\cap[U\leq (h(X)]\end{array}$$

et puisque cette réunion est incompatible, sa probabilité est égale à la somme des probabilités, d'où le résultat annoncé. Par croissance de la probabilité, on en déduit que

$$[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]\subset[(x<X\leq y)\cap(U\leq M(x,y))]$$

entraîne

$$\Psi(y)-\Psi(x)=P[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]\leq P[(x<X\leq y)\cap(U\leq M(x,y))]$$

Or x et y sont des réels fixés, et $(x>X\leq y)$ ne dépend que de X et $[U\leq M(x,y)]$ que de U; comme U et X sont indépendantes, ces deux évènements sont indépendants et on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}P[(x<X\leq y)\cap(U\leq M(x,y))] & = & P(x<X\leq y)\times P[U\leq M(x,y)]\\ & = & P(x<X\leq y)F_U[M(x,y)]\end{array}$$

De manière habituelle, comme $F(x)=P(X\leq x)$, on obtient que :

$$P(x<X\leq y)=P(X\leq y)-P(X\leq x)=F(y)-F(x)$$

Enfin comme $M(x,y)=h(\alpha_y)$ est une valeur prise par h, il appartient à $[0;1]$ (h est une fonction de I dans $[0;1]$) et la fonction de répartition de la loi uniforme vaut

$$F_U(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ t & \text{si } 0\leq t\leq 1\\ 1 & \text{si } t>1\end{cases}\qquad\text{donc}\qquad P[U\leq M(x,y)]=M(x,y)$$

On en déduit finalement que :

$$\Psi(y)-\Psi(x)\leq P[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]=[F(y)-F(x)]M(x,y).$$

(b) On établit de manière analogue que :

$$[(x<X\leq y)\cap(U\leq m(x,y))]\subset[(x<X\leq y)\cap(U\leq h(X))]$$

En effet si la première intersection est réalisé, $(x<X\leq y)$ est trivialement réalisé, et puisque $m(x,y)$ est le minimum de h sur $[x;y]$ et $X\in[x;y]$, on obtient bien que :

$$U\leq m(x,y)\leq h(X)$$

et $(U\leq h(X))$ est donc réalisé : l'intersection est bien réalisée, et l'inclusion ci-dessus est démontrée.

De même qu'au-dessus, comme X et U sont indépendants, les événements $(x < X \leq y)$ et $(U \leq m(x,y))$ le sont aussi, et $m(x,y)$ est une valeur de h donc appartient à $[0;1]$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\Psi(y) - \Psi(x) \geq P[(x < X \leq y) \cap (U \leq m(x,y))] &= P(x < X \leq y)P[U \leq m(x,y)] \\ &= [F(y) - F(x)]F_U(m(x,y)) \\ &= [F(y) - F(x)]m(x,y)\end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$[F(y) - F(x)]m(x,y) \leq \Psi(y) - \Psi(x) \leq [F(y) - F(x)]M(x,y)$$

qu'on divise par $(y - x) > 0$ (car on a supposé depuis le départ que $x < y$) et on obtient bien :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}m(x,y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x}M(x,y)$$

(c) Soit x fixé dans I, pour tout $y < x$ on reconnaît un taux d'accroissement de F dérivable (car la densité est continue sur cet intervalle donc F y est même C^1) de dérivée f et on a vu plus tôt les limites de m et M, on en déduit que :

$$\lim_{y \to x^+} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}m(x,y) = f(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{y \to x^+} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}M(x,y) = f(x)h(x)$$

Donc par encadrement on obtient la limite à droite du taux d'accroissement de Ψ :

$$\lim_{y \to x^+} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(x)h(x).$$

Cependant on ne peut pas appliquer directement cet encadrement pour obtenir le limite à gauche, car cet encadrement n'est vrai que pour $x < y$. Cependant lorsque $y < x$, on peut appliquer cet encadrement à $x' = y$ et $y' = x$, et on obtient :

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y}m(y,x) \leq \frac{\Psi(x) - \Psi(y)}{x - y} \leq \frac{F(x) - F(y)}{x - y}M(y,x)$$

En multipliant dans chaque fraction le numérateur et le dénominateur par (-1), on ne change la valeur d'aucune des quantités et on obtient finalement :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}m(y,x) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x}M(y,x)$$

A nouveau on fait tendre y vers x (mais par valeurs inférieures cette fois), les termes de gauche et de droite tendent vers $f(x)h(x)$ et par encadrement on obtient :

$$\lim_{y \to x^-} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(x)h(x).$$

et on on déduit finalement en rassemblant les deux cas que :

$$\lim_{y \to x, y \neq x} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(x)h(x).$$

et finalement Ψ est dérivable en tout point $x \in I$, Ψ est dérivable en x, donc Ψ est dérivable sur I et de plus :

$$\forall x \in I, \quad \Psi'(x) = f(x)h(x).$$

3. (a) On peut alors remarquer en partant de la droite (l'intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment donc existe) que :

$$\int_x^y f(t)h(t)\ dt = \int_x^y \Psi'(t)\ dt = [\Psi(t)]_x^y = \Psi(y) - \Psi(x).$$

(b) Par définition d'une intersection, l'évènement $[(X \leq x) \cap (U \leq h(X))]$ est inclus dans $(x \leq X)$, donc par croissance de la probabilité on en déduit que :

$$\Psi(x) = P[(X \leq x) \cap (U \leq h(X))] \leq P(X \leq x) = F(x).$$

De plus $\Psi(x)$ est une probabilité donc elle est positive, ce qui donne l'encadrement :

$$0 \leq \Psi(x) \leq F(x)$$

Or F est continue sur $\mathbb{R}$ car X est à densité, et $F(a) = 0$ car $X(\Omega) = I =]a; b[$, donc

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a) = 0$$

donc par encadrement :

$$\lim_{x \to a} \Psi(x) = 0.$$

On peut alors prendre les limites lorsque x tend vers a de l'égalité précédente, on en déduit (la convergence en a de l'intégrale généralisée étant donnée par la convergence de $\Psi(y) - \Psi(x)$) que :

$$\lim_{x \to a} \Psi(y) - \Psi(x) = \lim_{x \to a} \int_x^y f(t)h(t)\ dt$$

donc

$$\Psi(y) = \int_a^y f(t)h(t)\ dt$$

Enfin ceci est vrai pour tout $y \in I$, donc c'est aussi vrai pour tout $x \in I$ (en posant $y' = x$).

(c) Cette égalité est équivalente à :

$$\Psi(x) + P[(X > x) \cap (U \leq h(X))] = P(U \leq h(X)).$$

Or les évènements $[(X \leq x) \cap (U \leq h(X))]$ et $[(X > x) \cap (U \leq h(X))]$ sont incompatibles (X ne peut être en même temps inférieur ou égal et strictement supérieur à x) donc :

$$\Psi(x)+P[(X > x)\cap(U \leq h(X))] = P\left([(X \leq x) \cap (U \leq h(X))] \bigcup [(X > x) \cap (U \leq h(X))]\right)$$

et cette réunion, par distributivité de l'intersection, vaut encore :

$$\begin{aligned}\left([(X \leq x) \cap (U \leq h(X))] \bigcup [(X > x) \cap (U \leq h(X))]\right) &= [(X \leq x) \cup (X > x)] \cap [U \leq h(X)] \\ &= \Omega \cap [U \leq h(X)] = [U \leq h(X)].\end{aligned}$$

On en déduit bien finalement que :

$$\Psi(x) + P[(X > x) \cap (U \leq h(X))] = P(U \leq h(X))$$

donc

$$P[(X > x) \cap (U \leq h(X))] = P(U \leq h(X)) - \Psi(x).$$

Montrons alors pour obtenir la limite demandée que :

$$\lim_{x \to b} P((X > x) \cap (U \leq h(X))) = 0.$$

Ce même que précédemment, cette intersection est incluse dans $[X > x]$ et c'est une probabilité donc par croissance de la probabilité :

$$0 \leq P[(X > x) \cap (U \leq h(X))] \leq P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x).$$

Or F est continue en b et $F(b) = 1$ car $X(\Omega) =]a; b[$, on en déduit finalement que

$$\lim_{x\to b} 1 - F(x) = 1 - 1 = 0 \quad \text{donc par encadrement} \quad \lim_{x\to b} P[(X > x) \cap (U \leq h(X))] = 0.$$

Enfin on en déduit que

$$\Psi(x) = P(U \leq h(X)) - P[(X > x) \cap (U \leq h(X))] \underset{x\to b}{\longrightarrow} P(U \leq h(X)).$$

Mais enfin avec la question précédente on remarque que (la convergence en b de cette intégrale étant donnée par la convergence de Ψ) :

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)h(t)\ dt \underset{x\to b}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)h(t)\ dt$$

donc par unicité de la limite :

$$P(U \leq h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)\ dt.$$

4. On passe par l'évènement contraire :

$$\overline{U < h(X)} = [U \geq h(X)] = [-U \leq -h(X)] = [1 - U \leq 1 - h(X)]$$

donc :

$$P[U < h(X)] = 1 - P[\overline{U < h(X)}] = 1 - P[1 - U \leq 1 - h(X)].$$

Cherchons une densité de la variable aléatoire $1 - U$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{1-U}(x) = P(1-U \leq x) = P(U \geq 1-x) = 1-P(U < 1-x) = 1-P(U \leq 1-x) = 1-F_U(1-x)$$

car U est à densité; comme F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en 0 et 1, c'est aussi le cas de F_{1-U} par opérations élémentaires : $1 - U$ est donc à densité et une densité de $1 - U$ est donnée par :

$$f_{1-U}(t) = f_U(1-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - t \leq 0 \Longleftrightarrow t \geq 1 \\ 1 & \text{si } 0 < 1 - t < 1 \Longleftrightarrow 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 - t \geq 1 \Longleftrightarrow t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = f_U(t)$$

donc $1 - U$ suit la loi uniforme sur $]0; 1[$ (ce résultat est aussi donné par le cours puisque c'est une transformée affine de loi uniforme, on en a redonné ci-dessus la preuve).

De plus puisque h est continue sur I à valeurs dans $[0; 1]$, $1 - h$ est également continue sur I, valeurs dans $[0; 1]$ car :

$$0 \leq h(t) \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -h(t) \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq 1 - h(t) \leq 1.$$

On peut donc appliquer le résultat de la question 3c en remplaçant U par $1 - U$ puisqu'elles suivent la même loi et h par $1 - h$ puisqu'elle vérifie les mêmes hypothèses : on obtient que :

$$P(1 - U \leq 1 - h(X)) = \int_a^b f(t)[1 - h(t)]\ dt = \int_a^b f(t)\ dt - \int_a^b f(t)h(t)\ dt = 1 - \int_a^b f(t)h(t)\ dt$$

car f est une densité de X avec $X(\Omega) =]a; b[$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt = 1$. Enfin on peut conclure que :

$$P[U < h(X)] = 1 - P[1 - U \leq 1 - h(X)] = 1 - \left(1 - \int_a^b f(t)h(t)\ dt\right) = \int_a^b f(t)h(t)\ dt.$$

5. (a) Le système est viable si et seulement si il existe des quantités d'unités produites par les secteurs (notées x_1, x_2 et x_3), toutes strictement positives car sinon on ne produit rien, telles que les productions croisées ci-dessus soient possibles. Pour cela, il faut et il suffit que la quantités d'unités produites par chaque secteur soit supérieure à la quantité d'unités nécessaire pour la construction.

   Pour créer x_1 unités du secteur 1, d'après l'énoncé, il est nécessaire d'avoir αx_1 unités du secteur 1 et αx_1 unités du secteur 2.

   De même pour créer x_2 unités du secteur 2, il faut avoir βx_2 unités du secteur 1 et αx_2 du secteur 3, et enfin pour créer x_3 unités du secteur 3, il faut avoir βx_3 unités du secteur 2 et βx_3 du secteur 3.

   Au total il faut donc avoir : $(\alpha x_1 + \beta x_2)$ unités du secteur 1, $(\alpha x_1 + \beta x_3)$ unités du secteur 2 et $(\alpha x_2 + \beta x_3)$ unités du secteur 3. Pour qu'elles soient bien disponibles, il faut qu'elles aient été produites donc que :

$$\begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

   (b) On part de la deuxième propriété : dire qu'il existe une colonne X à composantes strictement positives telle que $A - AX$ n'a que des des composantes strictement positives signifie qu'il existe x_1, x_2 et x_3 tous strictement positifs tels que la colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vérifie :

$$X - AX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_3 \\ \alpha x_2 + \beta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha x_1 - \beta x_2 \\ x_2 - \alpha x_1 - \beta x_3 \\ x_3 - \alpha x_2 - \beta x_3 \end{pmatrix}$$

   n'aient que des composantes strictement positives, donc tels que :

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_1 - \beta x_2 > 0 \\ x_2 - \alpha x_1 - \beta x_3 > 0 \\ x_3 - \alpha x_2 - \beta x_3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

   donc si un tel X existe avec les conditions imposées, ses composantes sont une solution de système de la question a). De même en remontant les égalités écrites, si le système de la question a) a une solution la colonne X obtenue avec x_1, x_2 et x_3 vérifient les conditions imposées, donc l'équivalence est bien vérifiée.

6. (a) Puisqu'on demande de déterminer le sous-espace propre, il est inutile de vérifier avant la non inversibilité de $A - (\alpha + \beta)I$: le fait que le sous-espace propre ne soit pas réduit à $\{0\}$ permettra de conclure.

   Soit alors $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout :

$$\begin{aligned}
X \in E_{\alpha+\beta}(A) \iff\ & AX = (\alpha+\beta)X \iff \begin{cases} -\beta x + \beta y = 0 \\ \alpha x - (\alpha+\beta)y + \beta z = 0 \\ \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} x = y \\ \alpha x - (\alpha+\beta)y + \beta z = 0 \\ y = z \end{cases} \qquad \text{car } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \\
\iff\ & \begin{cases} x = y = z \\ \alpha x - (\alpha+\beta)x + \beta x = 0 \end{cases} \\
\iff\ & x = y = z \\
\iff\ & X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que $E_{\alpha+\beta}(A) = Vect\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \neq \{0\}$ donc $(\alpha+\beta)$ est bien valeur propre de A.

(b) On suppose que $\alpha+\beta<1$, en posant $X = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ qui est vecteur propre de A, toutes ses composantes sont bien strictement positives et puisqu'il est vecteur propre on a :

$$X - AX = X - (\alpha+\beta)X = (1-\alpha-\beta)X$$

donc chaque composante vaut $1-\alpha-\beta>0$ puisque $\alpha+\beta<1$.
D'après la question 5b, le système est donc viable.

7. (a) D'après la propriété admise, si le système est viable, le spectre de A est inclus dans $]-1;1[$. Comme $(\alpha+\beta)$ est une valeur propre, elle est donc dans $]-1;1[$, et enfin elle est bien strictement inférieure à 1.
Réciproquement si $\alpha+\beta<1$, d'après la question 6b, le système est viable.
On a donc prouvé l'équivalence : le système est viable si et seulement si $\alpha+\beta<1$.

(b) On considère à présent la matrice $A-\lambda I$ et on cherche les valeurs de λ pour lesquelles elle n'est pas inversible : comme $\alpha>0$ on en obtient facilement une réduite triangulaire avec les pivots $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftarrow \alpha L_2 - (\alpha-\lambda)L_1$, $L_3 \leftrightarrow L_2$, $L_3 \leftarrow \alpha L_3 - [\alpha\beta + \lambda(\alpha-\lambda)]L_2$:

$$\begin{pmatrix}\alpha-\lambda & \beta & 0\\ \alpha & -\lambda & \beta\\ 0 & \alpha & \beta-\alpha\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha & -\lambda & \beta\\ \alpha-\lambda & \beta & 0\\ 0 & \alpha & \beta-\alpha\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha & -\lambda & \beta\\ 0 & \alpha\beta+\lambda(\alpha-\lambda) & -\beta(\alpha-\lambda)\\ 0 & \alpha & \beta-\alpha\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\alpha & -\lambda & \beta\\ 0 & \alpha & \beta-\alpha\\ 0 & \alpha\beta+\lambda(\alpha-\lambda) & -\beta(\alpha-\lambda)\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha & -\lambda & \beta\\ 0 & \alpha & \beta-\alpha\\ 0 & 0 & P(\lambda)\end{pmatrix}$$

avec

$$P(\lambda) = -\alpha\beta(\alpha-\lambda) - (\beta-\lambda)(\alpha\beta-\lambda(\alpha-\lambda) = -\lambda^3 + (\alpha+\beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda - \alpha\beta(\alpha+\beta)$$

après développement et simplification (aucun factorisation visible n'est possible). Or on sait que $(\alpha+\beta)$ est une valeur propre, c'est donc une racine de ce polynôme, qu'on peut alors factoriser par $(\lambda-\alpha-\beta)$ (par une identification ou une division euclidienne) :

$$P(\lambda) = (\lambda-\alpha-\beta)\times[\alpha\beta-\lambda^2] = (\lambda-\alpha-\beta)\times(\sqrt{\alpha\beta}-\lambda)(\sqrt{\alpha\beta}+\lambda)$$

avec $\alpha\beta>0$ donc la racine existe bien. On en déduit finalement que le spectre de A, ensemble des racines de P, est :

$$Sp(A) = \{\alpha+\beta; -\sqrt{\alpha\beta}; \sqrt{\alpha\beta}\}.$$

8. La probabilité que le modèle soit viable est la probabilité de l'évènement :

$$E = (\alpha+\beta<1) = (\alpha<1-\beta).$$

On pose alors $h(t) = 1-t$ qui est continue sur $]0;1[$ à valeurs dans $]0;1[\subset[0;1]$, et comme α suit la loi uniforme sur $]0;1[$ (même rôle que U dans la partie I) et β vérifie toutes les hypothèses de la partie I avec $a=0$ et $b=1$ et h vérifie les hypothèses de la partie I, on peut appliquer le résultat de la question I4 :

$$P(E) = \int_0^1 f(t)(1-t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 tf(t)\,dt = 1 - E(\beta)$$

car $\beta(\Omega) =]0;1[$ donc les intégrales de $f(t)$ et de $tf(t)$ entre $-\infty$ et 0 d'une part et entre 1 et $+\infty$ d'autre part son nulles.

9. (a) Cette relation est équivalente à :

$$Y = YA{+}ZB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_1 + \alpha y_2 + \alpha z_2 & \beta y_1 \alpha y_3 + \beta z_1 + \alpha z_3 & \beta y_2 + \beta y_3 + \beta z_2 \end{pmatrix}$$

Prouvons une par une ces trois relations : y_1 est le prix de production de d'une unité du secteur 1, donc c'est le prix de α unités du secteur 1 achetés à prix coûtant (pas de marge du secteur sur lui-même) et de α unités du secteur 2 achetés au prix $y_2 + z_2$ donc on a bien :

$$y_1 = \alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2)$$

De même y_2 est le prix de production de d'une unité du secteur 2, donc c'est le prix de β unités du secteur 1 achetés au prix $(y_1 + z_1)$ et de α unités du secteur 3 achetés au prix $y_3 + z_3$ donc on a bien :

$$y_2 = \beta(y_1 + z_1) + \alpha(y_3 + z_3)$$

Enfin y_3 est le prix de production de d'une unité du secteur 3, donc c'est le prix de β unités du secteur 2 achetés au prix $(y_2 + z_2)$ et de β unités du secteur 3 achetés au prix coûtant y_3 donc on a bien :

$$y_3 = \beta(y_2 + z_2) + \beta y_3$$

(b) 1 n'est pas valeur propre de A donc $A - I$ et $I - A = -(A - I)$ sont bien inversibles. On en déduit que :

$$Y = YA + ZB \Leftrightarrow Y(I - A) = ZB \Leftrightarrow Y = ZB(I - A)^{-1}$$

donc il existe bien une unique solution Y à ce système.

10. (a) Comme Z est à densité, G est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $Z(\Omega) = I =]a; b[$, $G(a) = 0$ et $G(b) = 1$.

H est donc continue sur I comme restriction de G; de plus comme une densité de Z est continue sur I, H et donc G sont de classe C^1 sur$I$, de dérivée égale à cette densité strictement positive.

Donc H est strictement croissante et continue sur I, et réalise une bijection de $I =]a; b[$ dans $H(I) = G(I) =]G(a); G(b)[=]0; 1[$.

De plus par lecture inverse du tableau de variations de H on obtient facilement :

x	a		b
$H(x)$	0	$\nearrow$	1

x	0		1
$H^{-1}(x)$	a	$\nearrow$	b

(b) Pour tout $x \in I$, on peut écrire avec H strictement croissante sur I et $H^{-1}(U) \in I$ (voir tableau ci-dessus) et $x \in I$:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(H^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq H(x)) = F_U[H(x)]$$

Or (voir tableau de variations de H) pour tout $x \in I$, $H(x) \in]0; 1[$ et pour tout $t \in]0; 1[$, $F_u(t) = t$ donc :

$$F(x) = F_U[H(x)] = H(x) = G(x)$$

car H est la restriction de G.

(c) De plus comme $U(\Omega) =]0; 1[$, $X(\Omega) = H^{-1}(U)(\Omega) = H^{-1}(]0; 1[) =]a; b[= I$ (voir tableau de variations de H^{-1}). On en déduit que :

$$\forall x \leq a, \quad F(x) = H(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geq b, \quad F(x) = H(x) = 1.$$

Enfin $F(x) = H(x)$ sur $\mathbb{R}$, et X et Z suivent bien la même loi puisque leurs fonctions de répartitions sont égales.

11. (a) Ici $I =]0; +\infty[$, et on a :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad G(x) = H(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Enfin pour trouver H^{-1} on résout pour tout $y \in]0; 1[$ (donc $1 - y > 0$ et son logarithme existe bien) :

$$H(x) = y \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = y \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - y \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-y) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$$

et on en déduit que :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad H^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\lambda}.$$

(b) Voici le programme demandé :

```
def expo(lambda):
    u = rd.random()
    y = (-log(1-u))/lambda
    return(y)
```

12. (a) g est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive car l'exponentielle est strictement positive, il reste à prouver que c'est une densité de probabilité : la positivité et la continuité étant obtenues, il reste à considérer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$$

Or g est paire (domaine de définition $\mathbb{R}$ centré en 0 et $g(-x) = g(x)$ car $|-x| = |x|$, donc cette intégrale converge si et seulement si l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge. Or

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

converge et vaut $\frac{1}{2}$ (on reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre 1). D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = 2 \int_0^{+\infty} g(t)\, dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

g est donc une densité de probabilité qui est bien CSP($\mathbb{R}$).

(b) Pour tout $x \geq 0$, par formules des probabilités totales avec le système complet $([V = 1], [V = -1])$ puis par indépendance de V et Y on a :

$$\begin{aligned} P([X > x]) &= P([VY > x]) = P([VY > x] \cap (V = 1)] + P([VY > x] \cap [V = -1]) \\ &= P([Y > x] \cap (V = 1)] + P([-Y > x] \cap [V = -1]) \\ &= P(Y > x)P(V = 1) + P(Y < -x)P(V = -1) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(Y > x) + P(Y < -x)\right) \end{aligned}$$

Or $(Y < -x)$ est impossible car Y est positive donc :

$$P(X > x) = \frac{1}{2} P(Y > x).$$

D'autre part pour tout $x \leq 0$, toujours avec les probabilités totales et le même système complet d'évènements on obtient aussi :

$$\begin{aligned} P([X \leq x]) &= P([VY \leq x]) = P([VY \leq x] \cap (V = 1)] + P([VY \leq x] \cap [V = -1]) \\ &= P([Y \leq x] \cap (V = 1)] + P([-Y \leq x] \cap [V = -1]) \\ &= P(Y \leq x)P(V = 1) + P(Y \geq -x)P(V = -1) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(Y \leq x) + P(Y \geq -x)\right) \end{aligned}$$

et comme $X \geq 0$ et $x \leq 0$, $P(Y \leq x) = 0$ donc on obtient bien :

$$P(X \leq x) = \frac{1}{2}P(Y \geq -x).$$

(c) On sépare les deux cas ci-dessus : si $x \leq 0$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2}P(Y \geq -x) = \frac{1}{2}\left[1 - P(Y \leq -x)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - (1 - e^{-(-x)})\right] = \frac{1}{2}e^x.$$

Si $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - \frac{1}{2}P(Y > x) = 1 - \frac{1}{2}[1 - P(Y \leq x)] \\ &= 1 - \frac{1}{2}[1 - (1 - e^{-x})] = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

En rassemblant, on obtient :

$$F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(d) Cette fonction est de classe C^1 donc continue sauf peut-être en 0.
Étudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} F_X(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} F_X(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}$$

et $F_X(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$ donc F_X est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$, donc X est à densité. En dérivant F_X sauf en 0, valeur arbitraire, on obtient une densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|x|} = g(x)$$

donc g est bien une densité de X, et X suit la loi de Laplace.

(e) Voici le programme demandé :

```python
def laplace():
    y = expo(1)
    v = rd.random()
    if v < 1/2:
        return(y)
    else
        return(-y)
```

Explication : $v < 1/2$ modélise un évènement de probabilité $1/2$, ici l'évènement $V = 1$: dans ce cas $X = Y \times V = Y$. Dans l'autre cas (aussi de probabilité $1/2$), on a $X = Y \times V = -Y$.

13. f est CSP(I) donc elle est strictement positive sur I, et $c > 0$, on obtient donc l'encadrement :

$$0 \leq \frac{g(x)}{cf(x)} \leq 1$$

En effet g est positive et $cf(x) > 0$ donc la gauche est vérifiée, et la droite est l'inégalité de l'énoncé ($g(x) \leq cf(x)$) divisée par $cf(x) > 0$.

En posant $h(x) = \dfrac{g(x)}{cf(x)}$, cette fonction est bien définie sur I, à valeurs dans $[0; 1]$ et on a bien :

$$cf(x)h(x) = cf(x)\frac{g(x)}{cf(x)} = g(x).$$

14. U_k, X_k et h vérifient toutes les hypothèses de la partie I d'après les définitions, donc on peut utiliser la question I3c :

$$P(U_k \leq h(X_k)) = \int_a^b f(t)h(t)\ dt = \int_a^b \frac{g(t)}{c}\ dt = \frac{1}{c}\int_a^b g(t)\ dt = \frac{1}{c}$$

car on reconnaît l'intégrale de la densité de Z qui est nulle en dehors de $]a;b[$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt = 1$.

On peut alors remarquer que N est le rang du premier indice k tel que l'évènement $(U_k \leq h(X_k))$ est réalisé; comme ces évènements sont indépendants (les U_i et les X_i sont mutuellement indépendantes) et de même probabilité, on reconnaît bien la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{c}$ qui admet une espérance et une variance telles que :

$$E(N) = c \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1-\frac{1}{c}}{\frac{1}{c^2}} = \frac{(c-1)\times c^2}{c} = c(c-1).$$

15. (a) $(X \leq x) \cap (N = n)$ signifie que $(X = X_n \leq x)$ et que $N = n$, c'est-à-dire que tous les U_k, X_k entre 1 et $n-1$ ne satisfont pas à la condition $U_k \leq h(X_k)$ (c'est-à-dire que $U_k > h(X_k)$ pour tout k entre 1 et $n-1$), et que U_n et X_n y satisfont donc :

$$(X \leq x) \cap (N = n) = (X_n \leq x) \cap (N = n) = (X_n \leq x) \bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k] \cap [U_n \leq h(X_n)].$$

(b) X_n et U_n satisfont aux hypothèses de la partie I donc on peut appliquer la question 3b :

$$\Psi(x) = P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) = \int_a^x f(t)h(t)\ dt = \int_a^x \frac{g(t)}{c}\ dt = \frac{1}{x}G(x)$$

car g est nulle sur $]-\infty; a]$ donc :

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\ dt = \int_{-\infty}^a 0\ dt + \int_a^x g(t)\ dt = \int_a^x g(t)\ dt.$$

(c) Or les couples (X_i, U_i) sont mutuellement indépendants donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} P[(X \leq x) \cap (N = n)] &= P\left([X_n \leq x] \bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k] \cap [U_n \leq h(X_n)]\right) \\ &= P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) \times \prod_{k=1}^{n-1} P[U_k > h(X_k)] \\ &= \frac{1}{c}G(x) \times \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

(d) Par probabilité totales avec le système complet d'évènements $(N = n)_{n\geq 1}$ on obtient finalement :

$$P(X \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X \leq x] \cap [N = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{G(x)}{c}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} = \frac{G(x)}{c}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n}.$$

On reconnaît une série géométrique de paramètre $1 - \frac{1}{c} \in [0; 1[$ (car on a vu que $\frac{1}{c}$ est une probabilité donc se situe entre 0 et 1, et non nulle puisque $c > 0$); on peut d'ailleurs prouver proprement ce résultat en intégrant entre a et b l'inégalité donnée au départ par l'énoncé :

$$g(x) \leq cf(x) \to \int_a^b g(x)\ dx \leq c\int_a^b g(x)\ dx \to 1 \leq c \times 1 = c \to 0 < \frac{1}{c} \leq 1 \to 0 \leq 1 - \frac{1}{c} < 1$$

On en déduit que la série converge en on peut écrire :

$$P(X \leq x) = \frac{G(x)}{c} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{c}\right)} = \frac{G(x)}{c} \times c = G(x).$$

16. Les fonctions de répartition de X et Z sont égales sur I, montrons qu'elles le sont en dehors.

Comme $F_Z(a) = 0$ avec F_Z continue, $F_X = F_Z$ sur $]a; b[$ tend vers 0 en a^+, et par croissance et limite nulle en $-\infty$, $F_X(x) = 0 = F_Z(x)$ sur $]-\infty; a]$.

De même $F_Z(b) = 1$ et F_Z continue donc $F_X = F_Z$ sur $]a; b[$ tend vers 1 en b^-, et par croissance et limite égale à 1 en $+\infty$, $F_X(x) = 1 = F_Z(x)$ sur $[b; +\infty[$.

Finalement F_Z et F_X sont bien égales puisque l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et x suit la même loi que Z, donc simule bien la loi de Z.

17. (a) La fonction $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de Z : elle est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle est continue et strictement positive et par composée de fonctions continues, donc elle est bien CSP($\mathbb{R}$).

(b) a est dérivable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a'(x) = (1 - x)e^{x - \frac{x^2}{2}}$$

qui est strictement positive sur $[0; 1[$, nulle en 1 et strictement négative sur $]1; +\infty[$. a est donc strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

(c) a admet donc un maximum global sur $\mathbb{R}_+$ atteint en $x = 1$, donc pour tout $x \geq 0$ on a :

$$e^{x - \frac{x^2}{2}} \leq e^{1 - \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

On multiplie par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} > 0$, on a : pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = g(x) \leq \sqrt{\frac{e}{2\pi}} e^{-x} = \sqrt{\frac{e}{2\pi}} e^{-|x|} = \left(2\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\right) \times \frac{1}{2} e^{-x}$$

donc la constante $c = 2\sqrt{\frac{e}{2\pi}}$ satisfait à la condition demandée.

(d) On a donc obtenu, avec c la constante ci-dessus, que pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \leq cf(x).$$

Or g et f sont des fonctions paires, donc on obtient pour tout $x \leq 0$, avec $-x \geq 0$ donc on peut lui appliquer le c) :

$$g(x) = g(-x) \leq cf(-x) = cf(x).$$

Finalement, on obtient bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \leq cf(x).$$

(e) Toutes les hypothèses de la partie étant satisfaites, on va alors pouvoir simuler la loi de Z (normale centrée réduite) en suivant le protocole annoncé.

On commence par entrer la fonction laplace de la question 12e et la fonction :

$$h(x) = \frac{g(x)}{cf(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\frac{e}{2\pi}} \times \frac{1}{2}e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}e^{x-\frac{x^2}{2}} = e^{x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}.$$

On initialise un compteur à 0 puis on réalise une boucle "while" dans laquelle on simule la loi de Laplace avec la fonction vue en 12e, la loi uniforme avec rand() et on incrémente le compteur.

On répète ceci jusqu'à ce que la loi uniforme et la loi de Laplace simulées vérifient $u \leq h(x)$.

Le rang du compteur est alors une simulation de la valeur de N, et la dernière valeur de x (simulation de $X_n = X_N = X$) est une simulation de la loi normale centrée réduite.

(f) Voici le programme demandé :

```
def normale():
    x = laplace()
    u = rand()
    while u > np.exp(x-(x*x)/2-1/2) do
        x = laplace()
        u = rd.random()
    return(x)
```

Explication : en fait on se fiche d'obtenir la valeur de N, donc le compteur annoncé à la question précédente ne sert à rien, il a donc été supprimé par rapport au programme annoncé à la question précédente.