

Correction du sujet ECRICOME

Exercice 1 (ECRICOME 2006)

1. Montrons tout d'abord la linéarité de f . Soient $P_1, P_2 \in E$ et λ un réel. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2)(x) &= (x-1)(\lambda P_1 + P_2)'(x) + (\lambda P_1 + P_2)(x) \\ &= (x-1)\lambda P_1'(x) + (1-x)P_2'(x) + \lambda P_1(x) + P_2(x) \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

Donc $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Montrons que f est à valeurs dans E . Soit $P \in E$ tel que $P(x) = a + bx + cx^2$. Alors $f(P)$ est définie par :

$$f(P)(x) = (x-1)(b + 2cx) + a + bx + cx^2 = a - b + (2b - 2c)x + 3cx^2.$$

Donc $f(P)$ est un polynôme de E .

Finalement, f est l'endomorphisme de E .

2. On calcule les images des vecteurs de la base canonique. En utilisant le calcul ci-dessus :

- $f(P_0)(x) = 1 = P_0(x)$ donc $f(P_0) = P_0$.
- $f(P_1)(x) = 2x - 1 = 2P_1(x) - P_0(x)$ donc $f(P_1) = 2P_1 - P_0$.
- $f(P_2)(x) = 3x^2 - 2x = 3P_2(x) - 2P_1(x)$ donc $f(P_2) = 3P_2 - 2P_1$.

Donc la matrice A de f dans \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. A est inversible car elle est triangulaire supérieure et ses coefficients sont tous non nuls. Donc f est bijective et c'est donc un automorphisme de E .

4. Toujours en utilisant le calcul de la question 1., on a :

$$\begin{aligned} f(R_0)(x) &= 1 = R_0(x), \\ f(R_1)(x) &= -2 + 2x = 2(x-1) = 2R_1(x), \\ f(R_2)(x) &= 3 - 6x + 3x^2 = 3(x-1)^2 = 3R_2(x). \end{aligned}$$

Donc $f(R_0) = R_0$, $f(R_1) = 2R_1$ et $f(R_2) = 3R_2$.

5. La famille \mathcal{B}' est libre car c'est une famille de polynômes étagés en degré ($\deg(R_0) = 0$, $\deg(R_1) = 1$ et $\deg(R_2) = 2$). De plus, $\text{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E)$. Donc \mathcal{B}' est une base de E .

6. Par définition, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Pour tout réel x , on a :

$$R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = x(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = x^2 = P_2(x),$$

et

$$R_1(x) + R_0(x) = (x-1) + 1 = P_1(x).$$

Donc la matrice de passage de \mathcal{B}' dans \mathcal{B} est

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier rapidement que $P^{-1}P = I_3$.

8. Avec la formule de changement de bases,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \quad \text{donc} \quad A = PDP^{-1}.$$

Par passage à l'inverse, $A^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $[A^{-1}]^n = P [D^{-1}]^n P^{-1}$.

Ini. $P [D^{-1}]^0 P^{-1} = I_3 = A^0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

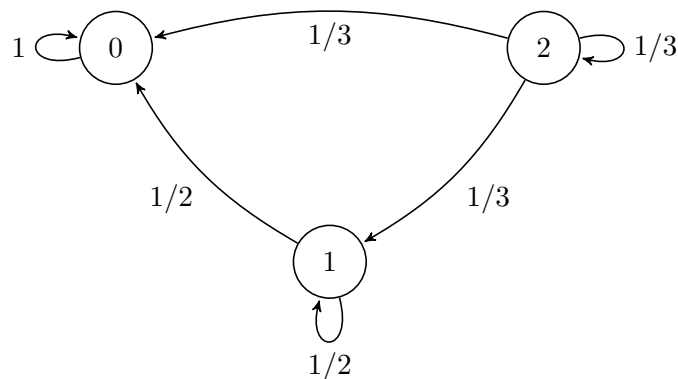
$$[A^{-1}]^{n+1} = A [A^{-1}]^n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} PDP^{-1}P [D^{-1}]^n P^{-1} = P [D^{-1}]^{n+1} P^{-1}.$$

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[A^{-1}]^n = P [D^{-1}]^n P^{-1}$.

On a alors (comme D est diagonale) :

$$\begin{aligned} [A^{-1}]^n &= P [D^{-1}]^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1/2)^n & 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. Voici le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$:



La matrice de transition B associée à la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = {}^t(A^{-1}).$$

10. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2 \rrbracket)$ et, d'après le cours, $E(X_1) = \frac{0+2}{2} = 1$ et $V(X_1) = \frac{(2-0+1)^2 - 1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

11. Les valeurs possibles de X_2 sont $\{0, 1, 2\}$. Avec le SCE $(X_1 = i)_{0 \leq i \leq 2}$, on a (par incompatibilité à la deuxième ligne, avec la formule des probabilités composées à la troisième) :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cup (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cup (X_1 = 2) \cap (X_2 = 0)) \\ &= P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) + P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 0)) \\ &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) \\ &\quad + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 0) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) \\ &\quad + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Enfin, toujours avec le même raisonnement,

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) \\ &\quad + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Comme X_2 est à support fini, elle admet une espérance et une variance.

$$E(X_2) = 0 \times \frac{11}{18} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Avec le théorème de transfert,

$$E(X_2^2) = 0^2 \times \frac{11}{18} + 1^2 \times \frac{5}{18} + 2^2 \times \frac{1}{9} = \frac{13}{18}.$$

Avec Koenig-Huygens,

$$V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{13}{18} - \frac{1}{4} = \frac{17}{36}.$$

12. Toujours avec la formule des probabilités totales obtenue à la question précédente avec le SCE $(X_k = i)_{0 \leq i \leq 2}$:

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 0) &= P(X_k = 0)P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) + P(X_k = 1)P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 0) \\ &\quad + P(X_k = 2)P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 0) \\ &= 1 \times P(X_k = 0) + \frac{1}{2} \times P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \times P(X_k = 2). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 1) &= P(X_k = 0)P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 1) + P(X_k = 1)P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) \\ &\quad + P(X_k = 2)P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) \\ &= 0 \times P(X_k = 0) + \frac{1}{2} \times P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \times P(X_k = 2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 P(X_{k+1} = 2) &= P(X_k = 0)P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 2) + P(X_k = 1)P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2) \\
 &\quad + P(X_k = 2)P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) \\
 &= 0 \times P(X_k = 0) + 0 \times P(X_k = 1) + \frac{1}{3} \times P(X_k = 2).
 \end{aligned}$$

On a donc

$$U_{k+1} = U_k \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = U_k B.$$

13. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k) : U_k = U_0 B^k$.

Ini. $U_0 B^0 = U_0 \times I_3 = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$U_{k+1} \stackrel{Q12}{=} U_k B \stackrel{\mathcal{P}(k)}{=} U_0 B^k B = U_0 B^{k+1}.$$

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = U_0 B^k$.

14. Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le produit $U_k = U_0 [{}^t(A^{-1})]^k$ donne la troisième ligne de ${}^t(A^{-1})^k$ donc avec la question 8,

$$\begin{aligned}
 P(X_k = 0) &= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\
 P(X_k = 1) &= \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\
 P(X_k = 2) &= \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

15. Voici le programme Python demandé :

```

1 | def simulX(k):
2 |     X = 2
3 |     for i in range(k):
4 |         X = rd.randint(0, X+1)
5 |     return(X)

```

16. La variable **S** contient 10000 simulations de X_{100} à la fin de la boucle **for** .

La commande **S.count(i)** compte le nombre de fois où X_{100} a pris la valeur $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. En divisant par 10000, on obtient la fréquence f_i associée. Donc **L** contient la loi empirique de X_{100} .

Comme le nombre de simulations est grand, f_i est une bonne estimation de la probabilité $P(X_{100} = i)$ donc **L** contient des estimations des probabilités $P(X_{100} = 0)$, $P(X_{100} = 1)$ et $P(X_{100} = 2)$. D'après la question 14, comme $k = 100$ est grand, on devrait obtenir $L \simeq [1, 0, 0]$.

Exercice 2 (ECRICOME 2005)

1. Pour I_0 :

$$I_0 = \int_0^1 \varphi_0(x) dx = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2}.$$

Pour I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 \varphi_1(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx$$

En intégrant par parties avec $u(x) = (1-x)$, $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, les fonctions u et v étant de classe \mathcal{C}^1 , on a :

$$I_1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x} dx = \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x) \leq 1 \Rightarrow (1-x)^n \geq (1-x)^{n+1} \Rightarrow (1-x)^n e^{-2x} \geq (1-x)^{n+1} e^{-2x}.$$

Donc $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes),

$$\int_0^1 \varphi_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 \varphi_n(x) dx \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite (I_n) est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours par construction :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n e^{-2x} \leq e^{-2x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, $\varphi_n(x) \geq 0$. En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a $I_n \geq 0$.

4. La suite (I_n) étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$ (théorème des suites monotones).

5. La fonction $g(x) = e^{-2x}$ est décroissante sur \mathbb{R} donc pour tout $x \in [0, 1]$, on a $g(x) \leq g(0) = 1$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait déjà d'après la question 3 que $I_n \geq 0$. Toujours par construction, on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$e^{-2x} \leq 1 \Rightarrow (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n.$$

En intégrant pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[\frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

7. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

8. On a : $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$.

On pose $u(x) = (1-x)^{n+1}$, $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$, $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Les fonctions u et v étant de classe \mathcal{C}^1 , on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2}(1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} [1 - (n+1) I_n]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1) I_n.$$

9. Avec les deux questions précédentes, on a :

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n \Rightarrow nI_n + I_n = 1 - 2I_{n+1} \Rightarrow nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$.

10. Toujours avec la question 8, on a :

$$\begin{aligned} nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n &\Rightarrow n(nI_n - 1) = -2nI_{n+1} - nI_n \\ &\Rightarrow n(nI_n - 1) = -2\frac{n}{n+1}(n+1)I_{n+1} - nI_n \\ &\Rightarrow n(nI_n - 1) = -2\frac{1}{1+1/n}(n+1)I_{n+1} - nI_n. \end{aligned}$$

Or avec la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_{n+1} = 1$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1) = -3$.

11. Avec la question précédente, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1) = -3$.

Posons $\varepsilon(n) = n(nI_n - 1) + 3$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) = n(nI_n - 1) + 3 &\Rightarrow n(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon(n) \\ &\Rightarrow nI_n - 1 = -\frac{3}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \\ &\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien l'existence de trois réels $a = 0$, $b = 1$, $c = -3$ et d'une quantité $\varepsilon(n)$ tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Exercice 3 (ECRICOME 2019)

1. Tout d'abord, f est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. Montrons que $f(-t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère plusieurs cas :

- Si $t \geq 1$, alors $-t \leq -1$ et dans ce cas

$$f(-t) = -\frac{-1}{(-t)^3} = \frac{-1}{-t^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$

- Si $t \leq -1$, $-t \geq 1$ et on a

$$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{-t^3} = \frac{-1}{t^3} = f(t).$$

- Enfin, si $-1 < t < 1$ alors $-1 < -t < 1$ et

$$f(-t) = 0 = f(t).$$

Dans tous les cas, on a bien $f(-t) = f(t)$. Ainsi, f est bien paire.

2. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On a :

$$\int_1^A f(t)dt = \int_1^A \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. (a) On utilise le changement de variable $u = -t$ (qui est \mathcal{C}^1). Comme dans ce cas $du = -dt$, il suit (comme $f(-u) = f(u)$ par parité) que

$$\int_{-A}^{-1} f(t)dt = - \int_A^1 f(-u)du = \int_1^A f(u)du.$$

Faisant tendre A vers $+\infty$ et utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ converge et vaut également $\frac{1}{2}$.

- (b) On vérifie que f satisfait aux critères d'une densité de probabilité :

- f est bien positive partout sur \mathbb{R} : c'est clair sur $] - 1; 1[$ (elle est nulle) et sur $[1; +\infty[$. Si $t \in] - \infty; -1]$, $t^3 \leq -1$ et donc $-1/t^3 \geq 0$.
- f est continue sauf peut-être en -1 et en 1 .
- Enfin, avec les questions précédentes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

4. (a) Par définition de la fonction de répartition de X , $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Ainsi,

- Si $x \leq -1$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \left(\frac{-1}{t^3} \right) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} - \int_{-A}^x \frac{dt}{t^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2t^2} \right]_{-A}^x = \frac{1}{2x^2}.$$

- Si $x \in] - 1; 1[$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + 0 = \frac{1}{2}.$$

- Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{dt}{t^3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

On a bien le résultat attendu.

- (b) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge (la convergence absolue étant équivalente à la convergence ici). Or :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt + \int_1^{+\infty} tf(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

On reconnaît une intégrale de Riemann convergente. Donc $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge et comme $t \mapsto tf(t)$ est impaire (car f est paire), on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge. Donc X admet une espérance et on a (avec le même raisonnement qu'à la question 3.(a)) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^0 tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt = - \int_0^{+\infty} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt = 0.$$

- (c) X admet une variance si et seulement elle admet un moment d'ordre 2 ce qui, avec les mêmes arguments que ci-dessus, est équivalent à la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

qui est cette fois une intégrale de Riemann divergente. Donc X n'admet pas de variance.

5. (a) Commençons par observer que $|X|(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 1$. Pour $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = P(-x < X \leq x) \quad (\text{car } X \text{ est à densité}) \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq -x) = F_X(x) - F_X(-x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) - \left(\frac{1}{2(-x)^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Au final, on obtient

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_Y de Y est clairement de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Elle est aussi continue en 1 ($\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 0$).

Ainsi, F_Y est continue sur \mathbb{R} et \mathcal{C}^1 sauf peut-être en 1. On peut donc conclure que Y est à densité.

- (b) Une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y là où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire en 1. On a bien

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- (c) Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt$ converge (la convergence absolue étant équivalente à la convergence ici). Comme f_Y est nulle en dehors de $[1; +\infty[$, il suffit de justifier la convergence et de calculer l'intégrale entre 1 et $+\infty$.

Soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A t f_Y(t) dt = \int_1^A \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2.$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = 2$.

6. (a) Si $D = -1$ alors $Z = 0$, si $T = 1$, alors $Z = 1$. Donc $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus, $P(Z = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Donc Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
Comme $D = 2Z - 1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent

$$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0, \quad V(D) = 2^2 V(Z) = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

- (b) Comme D et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant chacune une espérance, leur produit admet également une espérance, égale au produit des espérances.

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0.$$

- (c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE $\{(D = -1), (D = 1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= P((T \leq x) \cap (D = -1)) + P((T \leq x) \cap (D = 1)) \\ &= P((-Y \leq x) \cap (D = -1)) + P((Y \leq x) \cap (D = 1)) \\ &= P(Y \geq -x)P(D = -1) + P(Y \leq x)P(D = 1) \quad (\text{par indép. de } D \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \geq -x) + \frac{1}{2}P(Y \leq x). \end{aligned}$$

(d) Avec la question précédente et en utilisant que Y est à densité à la deuxième égalité :

$$F_T(x) = P(T \leq x) = \frac{1}{2}(1 - P(Y < -x) + P(Y \leq x)) = \frac{1}{2}(1 - F_Y(-x) + F_Y(x)).$$

En injectant la formule pour la fonction de répartition obtenue dans la partie précédente, on trouve

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On remarque que T suit la même loi que X .

7. (a) On rappelle que, d'après le cours

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) $U(\Omega) =]0, 1[$ donc $(\sqrt{1-U})(\Omega) =]0, 1[$ donc $V(\Omega) =]1, +\infty[$. Ainsi, $F_V(x) = 0$ si $x \leq 1$. Pour $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= P\left(1 - U \geq \frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &= P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (\text{en utilisant que } U \text{ est à densité}) \\ &= F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (\text{car } x > 1 \text{ donc } 1 - \frac{1}{x^2} \in]0, 1[). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et on reconnaît la fonction de répartition de Y . Ainsi, V et Y suivent la même loi.

8. (a) Voici le programme demandé :

```

1 | def D(n):
2 |     a = np.zeros(n)
3 |     for k in range(n):
4 |         if rd.random() < 1/2:
5 |             a[k] = -1
6 |         else:
7 |             a[k] = 1
8 |     return(a)

```

(b) Le programme proposé semble vouloir calculer la moyenne empirique d'un n -échantillon de T obtenu en simulant D avec la fonction précédente et Y par inversion avec la variable V et la loi uniforme. Pour n assez grand, la moyenne empirique est une bonne approximation de l'espérance. On s'attend donc à une approximation de celle-ci, c'est-à-dire à une valeur proche de 0.