Révisions 3

Correction du sujet EML

Exercice 1 (EML 2023 - Sujet zéro)

1. (a) Appelons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A. On a : $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -C_1$. Ainsi toutes les colonnes de la matrice A sont proportionnelles à la première colonne : elle est de rang 1.

   (b) Comme A est de rang 1, elle n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A. De plus, on a avec le théorème du rang :
$$\dim(Ker(A)) = 3 - rg(A) = 2$$
Les relations $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -C_1$ assurent que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A. Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une base de $E_0(A) = Ker(A)$.

   (c) On calcule AX_3 et on trouve $6X_3$. Comme X_3 est non nul, 6 est valeur propre de A et X_3 est un vecteur propre associé.

   (d) Par concaténation de familles libres (2 vecteurs non colinéaires et un vecteur non nul) de $E_0(A)$ et $E_6(A)$, (X_1, X_2, X_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme elle est de cardinal $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec :
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Le système différentiel (SH) s'écrit sous forme matriciel $X' = AX$ où $X : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et x, y z sont des fonctions dérivables. On sait alors, d'après le cours, que :
$$X(t) = \lambda_1 e^{0\times t} X_1 + \lambda_2 e^{0\times t} X_2 + \lambda_3 e^{6\times t} X_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 e^{6t} \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 e^{6t} \\ \lambda_2 - \lambda_3 e^{6t} \end{pmatrix}.$$
Ainsi X est solution de (SH) si et seulement s'il existe λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout t réel :
$$\begin{cases} x(t) &= 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= -\lambda_1 + 2\lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= \lambda_2 - \lambda_3 e^{6t} \end{cases}$$

3. Il y a existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy donc les solutions X_1 et X_2 sont égales.

4. (a) $X : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de (SH) et vérifie $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, c'est la solution cherchée.

   (b) Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ la solution du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il existe α, β et γ réels tels que pour tout t réel :

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve que : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$.

5. (a) Le vecteur colonne $B(t) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t qui permet d'écrire le système (S) sous la forme $(S)\quad X' = AX + B(t)$ est : $B(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

   (b) Si Y est solution de (S), on a l'égalité $B = Y' - AY$. Ainsi on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } (S) \quad &\Leftrightarrow \quad X' = AX + B \\ &\Leftrightarrow \quad X' = AX + Y' - AY \quad (\text{car } Y \text{ est solution de } (S)) \\ &\Leftrightarrow \quad (X - Y)' = A(X - Y) \quad (\text{par linéarité de la dérivation}) \\ &\Leftrightarrow \quad X - Y \text{ est solution de } (SH) \end{aligned}$$

   (c) On vérifie que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$:

$$AY(t) + B(t) = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 2e^t - 2 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2(1 - e^t) \\ e^t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y'(t).$$

D'après les questions 2 et 5.(b), la solution générale de (S) sur $\mathbb{R}$ est :

$$t \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (EML 2023)

1. (a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = -e^{-x}\frac{x+1}{x^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. On obtient le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$ 0

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien défini et $u_n > 0$".

Ini. $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $u_n \in \mathscr{D}_f$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
De plus, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ d'après la question précédente. Donc $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. (a) Voici le programme complété :

```python
def fonc_1(a):
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while u <= a :
    u = exp(-u)/u
    n = n+1
  return n
```

(b) On en déduit que $u_6 > 10^6$ et $u_5 \leq 10^{-6}$. On conjecture alors que :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Voici le programme demandé :

```python
def fonc_3(n):
  from numpy import exp
  u = 1
  for k in range(n):
    u = exp(-u)/u
  return u
```

3. (a) La fonction g est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, g est continue et strictement décroissante de $[0, +\infty[$ dans $]-\infty, 1]$. Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $]-\infty, 1]$.

(b) Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Or $0 \in]-\infty, 1]$ donc 0 admet un unique antécédent par g dans $]0, +\infty[$, que l'on note α. Puisque $g(0) = 1$, on en déduit que $\alpha \neq 0$. D'où $\alpha \in]0, +\infty[$.

(c) $g(\alpha) = 0$ par définition.
$g(1) = e^{-1} - 1^2 = \dfrac{1-e}{e} < 0$.
$g(1/e) = e^{-1/e} - \left(\dfrac{1}{e}\right)^2 = \dfrac{1}{1/e} - \dfrac{1}{e^2} = \dfrac{e^2 - e^{1/e}}{e^{1/e}e^2} > 0$ car $2 > \dfrac{1}{e}$ et que la fonction exponentielle est croissante.
Finalement, par stricte décroissance de g sur $[0, +\infty[$, on en déduit que :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1) \Rightarrow \frac{1}{e} < \alpha < 1.$$

4. (a) $u_0 = 1$, donc $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{e}$ donc

$$u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e} = \exp\left(\frac{e-1}{e}\right).$$

Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{e-1}{e} > 0$, donc $u_2 > e^0 = 1 = u_0$.

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$u_{2n+2} \geq u_{2n}$".

Ini. $u_2 > u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_{2n+2} \geq u_{2n} > 0$. Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, en composant deux fois par f, on obtient successivement :

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}$$

puis

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$.

Ainsi, $u_{2(n+1)} \geq u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n} > 0$ d'après la question précédente.
Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, en composant par f, on obtient :

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}.$$

Ainsi, $u_{2(n+1)+1} \leq u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
D'après la question 1.(b), $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Donc, d'après le théorème des suites monotones, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.

5. (a) Pour tout $x > 0$,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{\exp\left(-\dfrac{e^{-x}}{x}\right)}{\dfrac{e^{-x}}{x}} = xe^x \exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right) = x\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right).$$

(b) D'après la question précédente, $h(x) = x\exp\left(x - \dfrac{e^{-x}}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.
h est donc continue sur $]0, +\infty[$ par opération sur des fonctions continues.

En 0, $\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{e^{-x}}{x}\right)=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+}\exp\left(x-\frac{e^{-x}}{x}\right)=0$. Par produit des limites, on a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=0=h(0).$$

Donc h est continue sur $[0,+\infty[$.

(c) $h(0)=0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x)=x$ sur $[0,+\infty[$. Il reste à résoudre l'équation sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$,

$$\begin{aligned} h(x)=x &\Leftrightarrow x\exp\left(x-\frac{e^{-x}}{x}\right)=x\\ &\Leftrightarrow \exp\left(x-\frac{e^{-x}}{x}\right)=1 \qquad (\text{car } x\neq 0)\\ &\Leftrightarrow x-\frac{e^{-x}}{x}=0 \qquad (\text{en composant par ln})\\ &\Leftrightarrow x=f(x)\\ &\Leftrightarrow x=\alpha \qquad (\text{d'après la question 3.(b)}) \end{aligned}$$

(d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+3}=f\circ f(u_{2n+1})=h(u_{2n+1})$. Comme la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell\geq 0$ (question 4.(c)), on en déduit par passage à la limite (h étant continue sur $[0,+\infty[$) :

$$\ell=h(\ell)\Leftrightarrow \ell=0 \text{ ou } \ell=\alpha \quad (\text{question 5.(c)}).$$

Or, comme $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{2n+1}\leq u_1=\frac{1}{e}.$$

Par passage à la limite, $\ell\leq\frac{1}{e}$. Or (question 3.(c)), $\frac{1}{e}<\alpha$ donc $\ell<\alpha$. On a donc nécessairement $\ell=0$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème des suites monotones, soit $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et converge vers une limite finie ℓ', soit elle diverge vers $+\infty$.

   Supposons qu'elle converge vers une limite finie ℓ'. Avec le même raisonnement qu'à la question 5.(d), $\ell'=h(\ell')$ et donc $\ell'=0$ ou α.

   Or $u_0=1$ et par croissance de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, il vient $\ell'\geq 1>\alpha>0$ (question 3.(c)).

   On obtient une contradiction donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   Remarque : Comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, la suite (u_n) diverge également (mais pas vers $+\infty$ car ses termes impairs convergent).

Exercice 3 (EML 2005)

1. (a) T_n est le nombre de lancers pour obtenir le premier succès suivant, dans une suite d'expériences indépendantes de même probabilité de succès $1-x$.

   Donc $T_n\hookrightarrow\mathcal{G}(1-x)$ et $E(T_n)=\frac{1}{1-x}$ et $V(T_n)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

   (b) Le nombre de lancer pour obtenir un pile est indépendant du numéro de lancer auquel le décompte commence. Donc $T_1,T_2,\ldots,T_n$ sont indépendantes.

   (c) Pour $n\geq 1$, on a $S_n=\sum_{k=1}^n T_k$ donc S_n a une espérance et

$$E(S_n)=\sum_{k=1}^n E(T_k)=\frac{n}{1-x}$$

Les variables étant indépendantes, S_n a une variance et

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = \frac{nx}{(1-x)^2}.$$

(d) Le n-ième succès peut intervenir à partir de la n-ième expérience, sans limite de durée. Donc $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.

Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$. L'événement $(S_n = k)$ signifie que le n-ième succès a eu lieu lors de la k-ième épreuve. Autrement dit, il y a eu succès à la k-ième épreuve et que lors des $k-1$ premières expériences, le nombre de succès (qui suit une loi $\mathcal{B}(k-1, 1-x)$) est de $n-1$ et par indépendance.
Donc $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{n-1} x^{k-n} \cdot (1-x) = \binom{n-1}{k-1}(1-x)^n x^{k-n}$.

Comme $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) = 1$.

(e) On a donc

$$1 = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n} = \frac{(1-x)^n}{x^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. (a) X est le temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Sachant $(X = k)$, Y est le nombre de pile en k lancers indépendants, la probabilité de pile étant p, donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k, p)$.

(b) Quand $(X = k)$, Y prend les valeurs de $[\![0, k]\!]$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

(c) $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X=k) \cap (Y=0)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X=k) \cap (Y=0)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=0) \quad \text{(formule des probas composées)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{0} p^0 q^k = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^k = \frac{p}{q} q^2 \frac{1}{1-q^2} \quad \left(\text{car } \left|q^2\right| < 1\right) \\
&= pq \frac{1}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

(d) Soit n un entier naturel non nul. Toujours avec le système complet d'événements $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et avec le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} 0 + \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}.
\end{aligned}$$

En poursuivant le calcul, on a alors :

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \quad \text{(avec } q^2 \in]0,1[\text{ et } h=k+1\text{)} \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{h-1}{n+1-1} \left(q^2\right)^{h-1} \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^2} \frac{q^{n+1-1}}{p^{n+1}(1+q)^{n+1}} \quad \text{(avec la question 1.(e))} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

(e) Y admet une espérance si la série $\sum\limits_{n\geq 0} nP(Y=n)$ converge absolument. Pour $n \geq 1$,

$$|nP(Y=n)| = n \times \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1+q)^2} \times n \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.$$

Comme $\frac{q}{1+q} \in]0,1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} n \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}$ géométrique dérivée d'ordre 1 est convergente. Donc Y admet une espérance et on a :

$$E(Y) = \sum_{n+0}^{+\infty} nP(Y=n) = \frac{1}{(1+q)^2} \sum_{n+0}^{+\infty} n \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1+q)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)^2} = 1.$$

(f) Voici le programme complété :

```python
def simulY(p):
    x = rd.geometric(p)
    y = rd.binomial(x, p)
    return(y)
```

(g) Le programme réalise 10000 simulations de la variable aléatoire Y. Il fait ensuite la moyenne de ces simulations. Par la loi faible des grands nombres, elle devrait être proche de l'espérance de Y, c'est-à-dire de 1. C'est bien ce qu'on obtient ici.