Révisions 4

Correction du sujet EML

Exercice 1 (EML 2024)

1. (a) Les solutions de l'équation différentielle $x' = -x$ sont les fonctions

$$x: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & Ae^{-t} \end{array} \quad \text{avec } A \in mathbbR.$$

(b) Soient a et b deux nombres réels, on considère la fonction x_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0(t) = (at+b)e^{-t}.$$

Cette fonction sur $\mathbb{R}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= ae^{-t} - (at+b)e^{-t} \\ &= ae^{-t} - x_0(t) \\ &= -x_0(t) + ae^{-t}. \end{aligned}$$

Il vient que x_0 est solution de (E) si et seulement si $a = 1$; en particulier $x_0 : t \mapsto te^{-t}$ est une solution particulière de (E).

(c) D'après le principe de superposition, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x = x_0 + x_1$$

où x_0 est la solution particulière, et x_1 est une solution de l'équation homogène. Ainsi les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions

$$x: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (t+A)e^{-t} \end{array} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Le système (S) équivaut à $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice triangulaire A admet -1 pour unique valeur propre. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P(-I_2)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_2 \quad \text{absurde !}$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

(b) Le système différentiel (S) est linéaire à coefficients constants ; d'après le théorème de Cauchy (S) admet une unique solution (x, y) telle que $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

(c) La fonction y vérifie $y'(t) = -y(t)$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = Ae^{-t}$ sur $\mathbb{R}$. La condition $y(0) = 1$ donne $A = 1$, donc $y(t) = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction x vérifie $x'(t) = -x(t) + y(t)$ soit $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1 il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = (t + A)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$. La condition $x(0) = 1$ donne $A = 1$, donc $x(t) = (t+1)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

En conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t), y(t)) = ((t+1)e^{-t}, e^{-t})$.

(d) On a $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} + e^{-t} = 0$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$ par croissance comparée. Donc (x, y) converge vers l'état d'équilibre $(0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

3. On a le programme suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [(t + 1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 2 (EML 2002)

1. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a (avec le changement de variable $h = k - 1$) :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h \\ &= -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^h \underset{x \neq -1}{=} -\frac{1-(-x)^{2n}}{1-(-x)} = \frac{x^{2n}-1}{x+1}. \end{aligned}$$

2. On dresse le tableau de variation de P_n :

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la limite en $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} \\ &= x^{2n}\left(-x^{2n-1} + \frac{x^{2-2n}}{2} + \ldots + \frac{-x^{-1}}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \to +\infty \end{aligned}$$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$, on a :

$$P_n(1) < P_n(0) = 0.$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right)$$

Et comme

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0,$$

la suite $(P_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors croissante. Comme de plus

$$P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0,$$

alors pour tout entier $n \geq 1$, $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$.

5. P_n est continue et strictement croissante sur $]1,2]$ donc bijective de $]1,2]$ dans $]P_n(1), P_n(2)]$ (par le théorème de la bijection).

   Or $P_n(1) < 0 \leq P_n(2)$ donc $0 \in]P_n(1), P_n(2)]$. Donc 0 admet un unique antécédent $x_n \in]1,2]$ par P_n. Autrement dit, l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]1,2]$.

6. On programme la méthode de dichotomie pour programmer le calcul de x_2 à 10^{-3} près :

```python
def approx():
    a = 1
    b = 2
    while b-a > 10**(-3) :
        c = (a+b)/2
        if -c+(c**2)/2-(c**3)/3+(c**4)/4 > 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return((a+b)/2)
```

7. On a vu à la question 1 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$. Donc :

$$\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^x P_n'(t)dt = [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) = P_n(x)$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = 0$. Avec la relation de Chasles :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = 0$$

   d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

9. On étudie les variations de la différence. Soit $f(t) = t^{2n} - 1 - n(t^2-1)$. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2} - 1\right).$$

Or, pour $n \geq 1$ et $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} t \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad t^{2n-2} \geq 1^{2n-2} \quad \text{(par croissance de } t \mapsto t^{2n-2} \text{ car } n \geq 1) \\ &\Rightarrow \quad 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2} - 1\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad f'(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc, pour $n \geq 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $f(1) = 0$. Donc, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$f(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

10. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq \frac{n\left(t^2 - 1\right)}{t + 1}.$$

Comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croissantes),

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geq \int_1^{x_n} \frac{n\left(t^2 - 1\right)}{t + 1}\, dt = \int_1^{x_n} n(t - 1)\, dt = n\left[\frac{(t - 1)^2}{2}\right]_1^{x_n} = \frac{n(x_n - 1)^2}{2}.$$

Avec la question 8, on obtient :

$$\frac{n(x_n - 1)^2}{2} \leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt.$$

On majore à nouveau en remarquant que $1 - t^{2n} \leq 1$ (bornes croissantes) :

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t + 1}\, dt = [\ln(t + 1)]_0^1 = \ln(2).$$

Finalement :

$$0 \leq \frac{n(x_n - 1)^2}{2} \leq \ln(2)$$

Donc en divisant par $n > 0$ puis en composant par la fonction racine carrée (qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$), on a :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

11. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} = 0$, on a par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - 1) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = 1.$$

Exercice 3 (ECRICOME 2022 et EML sujet zéro 2022)

1. Par définition,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et c'est le sous-espace vectoriel engendré par les deux matrices ci-dessus. La famille formée par ces deux matrices est génératrice de F et elle est libre (deux vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de F et $\dim(F) = 2$.

2. On remarque que I est un élément de G, car $I^2 = I$. Par contre, $2I \notin G$ car $(2I)^2 = 4I \neq 2I$. Ainsi, G n'est pas stable par multiplication par un réel et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. (a) En prenant $a = 2/3$ et $b = -1/3$ dans la définition de F, on a bien $A \in F$. D'autre part,

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$$

donc $A \in G$. Ainsi, $A \in F \cap G$.

(b) Comme A vérifie la relation $A^2 = A$, on en déduit que le polynôme $X^2 - X$ annule A.

(c) 0 et 1 sont racines du polynôme annulateur $X^2 - X = X(X-1)$ de A. Donc 0 et 1 sont les valeurs propres possibles de A. On va vérifier pour chacune de ces deux valeurs si c'est bien une valeur propre de A ou non.

- Pour 0 : $A - 0I_3 = A$ est non inversible car $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ donc 0 est bien valeur propre.
- Pour 1 : $A - I_3$ est non inversible car $L_1 = L_2 = L_3$ donc 1 est bien valeur propre.

Ainsi, $Sp(A) = \{0, 1\}$.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} M \in G \quad &\Leftrightarrow \quad M^2 = M \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 &=& a \\ b^2+2ab &=& b \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 &=& a \\ b(b+2a-1) &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(b) La deuxième équation $b(b+2a-1) = 0$ donne $b = 0$ ou $b = 1-2a$. Si $b = 0$, on obtient en injectant dans la première équation que $a^2 = a$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = 1$. La matrice M correspondant à $a = b = 0$ est la matrice nulle qui est donc élément de $F \cap G$. La matrice M pour $a = 1$ et $b = 0$ est la matrice I. Si maintenant $b = 1-2a$, on a $b^2 = 1 - 4a + 4a^2$ et en injectant dans la première équation, on a

$$a^2 + 2(1 - 4a + 4a^2) = a \Longleftrightarrow 9a^2 - 9a + 2 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3}.$$

Au final,

$$\begin{aligned} M \in F \cap G \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 &=& a \\ b(b+2a-1) &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1/3 \\ b &=& 1/3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 2/3 \\ b &=& -1/3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En observant ensuite que

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = I_3 - A$$

et que le choix de $a = 2/3$ et $b = -1/3$ donne la matrice A, on a bien

$$F \cap G = \{0,\ I_3,\ A,\ I_3 - A\}.$$

5. A et B étant deux matrices non colinéaires de F, (A, B) est une famille libre de F de cardinale 2. Comme F est de dimension 2, la famille (A, B) forme une base de F.

6. (a) On pose $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. On a

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & 2\alpha+\beta & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \beta-\alpha & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or, $2\alpha + \beta = 3a$ et $\beta - \alpha = 3b$ donc $\alpha A + \beta B = M$.

(b) Comme $A^2 = A$ (car $A \in G$), on a :

$$AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0 \quad \text{et} \quad BA = (I_3 - A)A = A - A^2 = 0.$$

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

Ini. $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I_3 - B = I_3 = M^0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (\alpha^n A + \beta^n B) \times (\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta AB + \beta^n \alpha BA + \beta^{n+1} B^2 \\ &= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B \end{aligned}$$

car $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

7. (a) On raisonne par double implication :

$\Rightarrow$ Par contraposition. Si $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$), alors $M = \beta B$ (resp. $M = \alpha A$) et M n'est pas inversible en tant que multiple d'une matrice non inversible.

$\Leftarrow$ Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors (en utilisant le résultat de la question suivante...) :

$$\left(\alpha^{-1} A + \beta^{-1} B\right)(\alpha A + \beta B) = A^2 + \alpha^{-1}\beta AB + \beta^{-1}\alpha BA + B^2 = A + B = I,$$

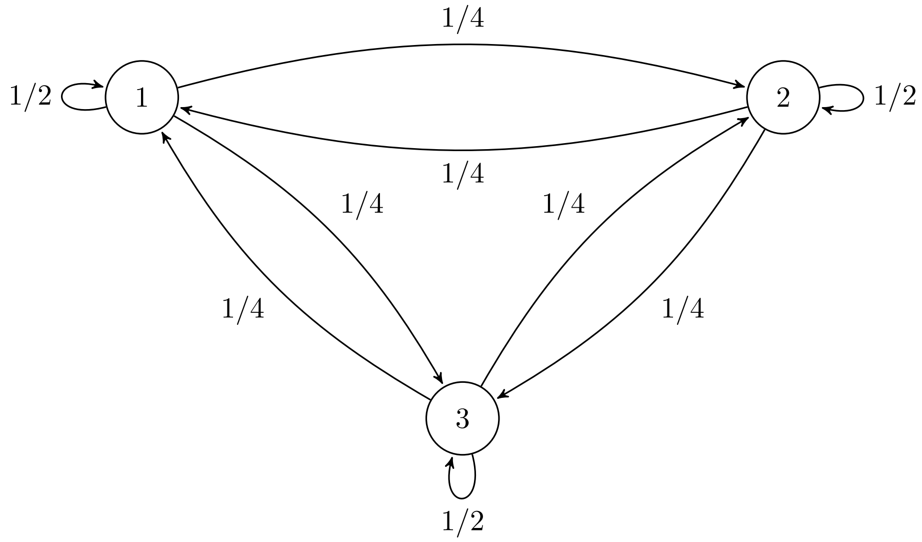
car $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Donc $M = \alpha A + \beta B$ est bien inversible (et on a même M^{-1}).

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme M est inversible, M^n l'est aussi et on a $(M^n)^{-1} = M^{-n}$. On vérifie donc que $\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$ est l'inverse de M^n :

$$\begin{aligned}\left(\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B\right) \cdot (\alpha^n A + \beta^n B) &= \alpha^0 A^2 + \alpha^{-n}\beta^n AB + \beta^{-n}\alpha^n BA + \beta^0 B^2 \\ &= A + B = I_3,\end{aligned}$$

toujours car $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

8. (a) On affecte aux sommets A, B et C les numéros 1, 2 et 3 respectivement. Le graphe probabiliste permettant de représenter la situation est :



La matrice de transition de ce graphe est la matrice carrée d'ordre 3 où le terme figurant en ligne i et colonne j est égal au poids de l'arête allant du sommet i vers le sommet j si cette arête existe ou à 0 sinon. Cela justifie que la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

(b) Voici le programme demandé :

```python
def etape_suivante(i):
    j = i
    p = rd.random()
    if i == 1:
        if p<1/4 :
            j = 2
        elif p<1/2 :
            j = 3
    if i == 2 :
        if p<1/4 :
            j = 1
        elif p<1/2 :
            j = 3
    if i == 3 :
        if p<1/4 :
            j = 1
        elif p<1/2 :
            j = 2
    return(j)
```

(c) Ce programme permet de simuler le déplacement du pion entre les instants 0 et 50. La variable `X` contient les positions successives du pion et le graphique représente l'évolution de ces positions en fonction du temps n.

9. Un état stable de la chaîne de Markov est un élément $V = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tel que :

- V est stochastique (donc $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $a + b + c = 1$).
- $VM = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b+c & a+2b+c & a+b+2c \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

On obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 1 \\ -2a+b+c & = & 0 \\ a-2b+c & = & 0 \\ a+b-2c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a+b+c & = & 1 & \\ 3b+3c & = & 2 & (L_2 \leftarrow L_2+2L_1) \\ -3b & = & -1 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \\ -3c & = & -1 & (L_4 \leftarrow L_4-L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Il y a donc un unique état stable $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

10. (a) A l'étape 0, le pion est en A donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
A l'étape 1, la probabilité qu'il reste en A est $\frac{1}{2}$ donc $p_1 = \frac{1}{2}$. Sinon, comme il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points, on a : $q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$.

(b) Avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) :

$$\begin{array}{rcll} P(A_{n+1}) & = & P((A_{n+1}\cap A_n)\cup(A_{n+1}\cap B_n)\cup(A_{n+1}\cap C_n)) & \\ & = & P(A_{n+1}\cap A_n)+P(A_{n+1}\cap B_n)+P(A_{n+1}\cap C_n) & \text{(par incompatibilité)} \\ & = & P(A_n)\underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{=\frac{1}{2}}+P(B_n)\underbrace{P_{B_n}(A_{n+1})}_{=\frac{1}{4}}+P(C_n)\underbrace{P_{C_n}(A_{n+1})}_{=\frac{1}{4}} & \text{(probas composées)} \\ & = & \frac{1}{2}P(A_n)+\frac{1}{4}P(B_n)+\frac{1}{4}P(C_n) & \end{array}$$

Ainsi $p_{n+1} = \frac{1}{2}\,p_n + \frac{1}{4}\,q_n + \frac{1}{4}\,r_n$.
On raisonne de la même manière pour trouver :

$$\left\{\begin{array}{rl} q_{n+1} & = \frac{1}{4}\,p_n + \frac{1}{2}\,q_n + \frac{1}{4}\,r_n \\ r_{n+1} & = \frac{1}{4}\,p_n + \frac{1}{4}\,q_n + \frac{1}{2}\,r_n \end{array}\right.$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} V_{n+1} & = & \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,p_n+\frac{1}{4}\,q_n+\frac{1}{4}\,r_n & \frac{1}{4}\,p_n+\frac{1}{2}\,q_n+\frac{1}{4}\,r_n & \frac{1}{4}\,p_n+\frac{1}{4}\,q_n+\frac{1}{2}\,r_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & = & V_n \times M. \end{array}$$

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$V_n = V_0 M^n$".

Ini. $V_0 M^0 = V_0 \times I_3 = V_0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{array}{rcll} V_{n+1} & = & V_n \times M & \text{(avec la question précédente)} \\ & = & V_0 \times M^n \times M & (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ & = & V_0 M^{n+1} & \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 M^n$.

11. (a) On a vu à la question 8.(a) que

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{4}$. Avec les notations de la partie 1, on a donc :

$$M = \alpha A + \beta B$$

avec $\alpha = a - b = \frac{1}{4}$ et $\beta = a + 2b = 1$. Donc avec la question 6.(a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \frac{1}{4^n}A + B = \frac{1}{3 \times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $V_n = V_0 M^n$ (question 10.(c)), on a par produit matriciel puis par identification ($V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) :

$$p_n = \frac{4^n+2}{3 \times 4^n}, \qquad q_n = \frac{4^n-1}{3 \times 4^n}, \qquad r_n = \frac{4^n-1}{3 \times 4^n}.$$

Ces trois suites convergent vers $\frac{1}{3}$. Il y a donc convergence vers l'état stable obtenu à la question 9. Ainsi, si on observe la position du pion après un très grand nombre d'étapes, il y a presque autant de chances qu'il soit sur l'un quelconque des points A, B et C.

12. (a) La variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ compte le nombre de passage en A entre les temps 1 et n. L'espérance $E(S_n)$ est donc le nombre moyen de passage en A entre le temps 1 et le temps n.

(b) Voici la fonction demandée :

```python
def simulS(n):
    x = 1
    c = 0
    for k in range(1,n+1):
        x = etape_suivante(x)
        if x == 1 :
            c = c +1
    return(c)
```

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n : son espérance est donc p_n.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Ainsi, d'après la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) = \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right). \end{aligned}$$

13. (a) Voici la fonction demandée :

```python
def simulTB():
    x = 1
    c = 0
    while x != 2 :
        x = etape_suivante(x)
        c = c+1
    return(c)
```

(b) Comme le pion est en A à l'étape 0, $(T_B = 1) = B_1$ donc : $P(T_B = 1) = \dfrac{1}{4}$.

D'autre part, $(T_B = 2) = \overline{B_1} \cap B_2 = (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$. Donc :

$$\begin{aligned} P(T_B = 2) &= P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) \quad \text{(probas composées)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)$$

En prenant l'intersection avec B_3, on obtient 4 événements deux à deux disjoints, et ainsi :

$$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap C_2 \cap B_3) + P(C_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(C_1 \cap C_2 \cap B_3).$$

Les quatre probabilités du membre de droite se calculent de la même manière.

- Calculons $P(A_1 \cap A_2 \cap B_3)$. Comme la position à l'étape 3 ne dépend que la position à l'étape 2, il vient :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_1 \cap A_2}(B_3) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_2}(B_3)$$

  Ainsi on a : $P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = \dfrac{1}{4}P(A_1 \cap A_2)$.
- On procède de la même manière avec les 3 autres probabilités $P(A_1 \cap C_2 \cap B_3)$, $P(C_1 \cap A_2 \cap B_3)$ et $P(C_1 \cap C_2 \cap B_3)$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) &= \frac{1}{4}\left(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap C_2)\right) \\ &= \frac{1}{4}P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \frac{1}{4}P((A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2)) \\ &= \frac{1}{4}P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \end{aligned}$$

On a alors :

$$P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3)}{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})} = \frac{1}{4}.$$

(d) On a :

$$(T_B = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k = D_{k-1} \cap B_k.$$

Avec les probabilités composées puis le résultat admis, il vient :

$$P(T_B = k) = P(D_{k-1} \cap B_k) = P(D_{k-1})P_{D_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{4}P\left(D_{k-1}\right).$$

Or :

$$D_{k-1} = \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = (T_B \geq k).$$

Donc :

$$P(T_B = k) = \frac{1}{4}P(T_B \geq k).$$

(e) $(T_B \geq k) = (T_B = k) \cup (T_B \geq k+1)$ donc par incompatibilité :

$$P(T_B \geq k) = P((T_B = k) \cup (T_B \geq k+1)) = P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1).$$

(f) On a alors :

$$\begin{aligned} P(T_B = k) &= \frac{1}{4}P(T_B \geq k) \quad \text{(avec 7.(d))} \\ &= \frac{1}{4}P(T_B = k) + \frac{1}{4}P(T_B \geq k+1) \quad \text{(avec 7.(e))} \\ &= \frac{1}{4}P(T_B = k) + P(T_B = k+1) \quad \text{(avec 7.(d))} \end{aligned}$$

Donc $P(T_B = k+1) = P(T_B = k) - \frac{1}{4}P(T_B = k) = \frac{3}{4}P(T_B = k)$.

(g) Comme $P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$, on a avec la question précédente (formule explicite d'une suite géométrique) :

$$P(T_B = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

Ainsi T_B suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$. Donc T_B admet une espérance et une variance et :

$$E(T_B) = \frac{1}{1/4} = 4 \qquad \text{et} \qquad V(T_B) = \frac{3/4}{1/16} = 12.$$
