Révisions 5

Correction du sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2021)

1. f est une fonction polynomiale en x et y, donc elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) On a $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x$.

   (b) Les points critiques de f sont les couples (x,y) qui annulent les dérivées partielles d'ordre 1. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

   Donc f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

3. (a) On a $\partial^2_{1,1} f(x,y) = 6x$, $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 6y$ et $\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial^2_{1,2} f(x,y) = -3$.

   (b) La matrice Hessienne de f en (x,y) vaut : $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $\nabla^2 f(x,y)$ sont les réels λ pour lesquels $\nabla^2 f(x,y) - \lambda I$ est non inversible.

   - Au point $(0,0)$:

$$\nabla^2 f(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

     Donc

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -\lambda \\ -\lambda & -3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -\lambda \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+3) \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - \lambda L_1$$

     Les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(0,0)$ sont donc 3 et -3 qui sont de signe opposés et donc f n'a pas d'extremum au point $(0,0)$.

   - Au point $(1,1)$:

$$\nabla^2 f(1,1) - \lambda I = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}.$$

     Donc

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 6-\lambda \\ 6-\lambda & -3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 6-\lambda \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda-9) \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + (6-\lambda)L_1$$

     Les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(1,1)$ sont 3 et 9 et sont strictement positives donc f admet un minimum local en $(1,1)$ qui vaut $f(1,1) = -1$.

4. $f(1,1) = -1$ n'est pas un minimum global puisque $f(0,-2) = -8 < f(1,1)$.

5. (a) On a $g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1$. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1).$$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les limites, $g(x) \underset{-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit donc que :

- Sur $]-\infty,1]$: $g(x) \leq 3$ donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution dans $]-\infty,1]$.
- Sur $]1,+\infty[$: g est continue et strictement croissante de $]1,+\infty[$ donc $]-1,+\infty[$. Par le théorème de la bijection, c'est donc une bijection de $]1,+\infty[$ donc $]-1,+\infty[$. Pour tout n supérieur ou égal à 4 appartient, $n \in]-1,+\infty[$ donc l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution dans $]1,+\infty[$, que l'on notera u_n.

(b) Voici la fonction demandée :

```
def suiteu (n) :
  u = 1
  while u**3-3*u+1 < n :
    u = u + 0.1
  return u
```

6. (a) Comme h est une bijection continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, sa bijection réciproque h^{-1} est elle aussi continue et strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, d'où son tableau de variation :

x	-1		$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Comme $u_n \in]1,+\infty[$, on a : $g(u_n) = h(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = h^{-1}(n)$, par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty.$$

(c) La définition de u_n donne $n = g(u_n) = u_n^3 - 3u_n + 1 = u_n^3\left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^3$.

Par conséquent, $u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Puisque l'équivalence est compatible avec les puissances, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/3}$. Donc $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 (EDHEC 2021)

1. (a) On note $E = \text{Vect}\left(I, M_a, M_a^2\right)$. Vérifions si la famille $\left(I, M_a, M_a^2\right)$ est libre. On a :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \text{ et } M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On peut tout écrire mais aussi ne considérer que la première colonne des matrices :

$$xI + yM_a + zM_a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x + (1-a)y + (1-a^2)z = 0 \\ 0x + 0y + (1-a)^2 z = 0 \end{cases}$$

Ce système étant triangulaire avec 3 pivots non nuls (car $a \neq 1$), sa seule solution est $x = y = z = 0$. Donc la famille $\left(I, M_a, M_a^2\right)$ est libre et c'est une base de E. Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a $\dim(E) = 3$.

(b) On a : $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer $(M_a - I)(M_a - aI)^2$, on remarque que $M_a - I = (1-a)J$ et $M_a - aI = (1-a)K$. Ce qui donne alors $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (1-a)J(1-a)^2K^2 = (1-a)^3 JK^2 = 0$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} 0 &= (M_a - I)(M_a - aI)^2 \\ &= (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I) \\ &= M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2 M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2 I \\ &= M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + (a^2 + 2a)M_a - a^2 I \end{aligned}$$

Donc $M_a^3 = (2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I$. Et M_a^3 appartient bien à E.

2. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

"il existe un unique triplet (u_n, v_n, w_n) tel que $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$".

Ini. $M_a^0 = I = 0M_a^2 + 0M_a + 0I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 1)$.
On vérifierait aisément aussi que $(u_1, v_1, w_1) = (0, 1, 0)$ et $(u_2, v_2, w_2) = (1, 0, 0)$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} M_a^{n+1} &= M_a.M_a^n = M_a(u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I) \quad (\text{car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}) \\ &= u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= u_n \left((2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I\right) + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= \left((2a+1)u_n + v_n\right) M_a^2 + \left(-a(a+2)u_n + w_n\right) M_a + a^2 u_n I \\ &= u_{n+1} M_a^2 + v_{n+1} M_a + w_{n+1} I \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, en posant

$$\begin{cases} u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$$

Ccl. Par récurrence, on a donc montré que la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Les relation de récurrence et l'initialisation à $(u, v, w) = (0, 0, 1)$ semblent correctes !!

Le problème se situe aux lignes 8 et 9 car, pour calculer les nouvelles valeurs de v et w, on utilise la valeur de u qui a déjà été changée à la ligne 7. Et donc au lieu de calculer $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n$ et $w_{n+1} = a^2 u_n$, on calcule $v_{n+1} = -a(a+2)u_{n+1} + w_n$ et $w_{n+1} = a^2 u_{n+1}$.

(c) Il aurait fallu sauvegarder la valeur de u qui sert à calculer.

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
a = input('entrez une valeur pour a :')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(n) :
    sauv = u
    u = (2*a+1)*u+v
    v = -a*(a+2)*sauv+w
    w = a*a*sauv
print(w,v,u)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= (2a+1)u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + w_{n+1} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n. \end{aligned}$$

4. (a) On a admis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}.$$

Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, il nous faut déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)a^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na^{n+1}$. On a :

$$(n-1)a^n = e^{\ln(n-1)}e^{n\ln(a)} = e^{\ln(n-1)+n\ln(a)} = e^{n\left(\frac{\ln(n-1)}{n}+\ln(a)\right)}.$$

Or $\dfrac{\ln(n-1)}{n}+\ln(a) = \dfrac{\ln(n)}{n}+\dfrac{\ln(1-1/n)}{n}+\ln(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(a) < 0$ par croissance comparée.

Donc $n\left(\frac{\ln(n-1)}{n}+\ln(a)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $(n-1)a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On démontrerait de même que : $na^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)a^n - na^{n+1}+1}{(a-1)^2} = \dfrac{1}{(a-1)^2}$.

Ensuite, $w_{n+1} = a^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$.

Et enfin : $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{-a(a+2)}{(a-1)^2} + \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{-2a}{(a-1)^2}$.

(b) On a alors :

$$\begin{aligned} L_a &= \lim_{n\to+\infty} M_a^n \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to\infty} w_n\right) I \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 + \frac{-2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I\right) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a - aI\right)^2 \end{aligned}$$

(c) On se souvient que $M_a - aI = (1-a)K$, donc

$$L_a = \frac{1}{(a-1)^2}(M_a - aI)^2 = \left(\frac{M_a - aI}{a-1}\right)^2 = K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne alors

$$L_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_a.$$

Exercice 3 (EDHEC 2011)

1. (a) $(X_i = 1)$ signifie que l'urne i contient encore ses n boules après les n tirages, donc qu'elle n'a jamais été choisie. On a donc par indépendance :

$$P(X_i = 1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U_{i,k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

(b) $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ signifie qu'aucune des deux urnes i et j n'ont été choisies. A chaque tirage, la probabilité en est de $\frac{n-2}{n}$ (urnes équiprobables) donc, pour tout $i \neq j$, on a :

$$P\left((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

(c) $\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = -\frac{1}{n^2}$ donc $1 - \frac{2}{n} \neq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \neq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$. On a ainsi :

$$P(X_i = 1)\, P(X_j = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \neq \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = P\left((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\right).$$

Ainsi, si i et j sont deux entiers naturels distincts, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. (a) X_i est une variable de Bernoulli donc $E(X_i) = P(X_i = 1)$ donc

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

(b) On a alors :

$$\frac{1}{n}E(Y_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right].$$

Comme $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -n\frac{1}{n} = -1 \underset{n \to +\infty}{\to} -1$.

Par composition avec exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{n}E(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\to} e^{-1}$.

Finalement, $\frac{E(Y_n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-1}$ et donc $E(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Y_n compte le nombre d'urne restant intactes. Donc, en moyenne, le tiers ($e \simeq 3$) environ des urnes reste intactes.

3. (a) N_i est le nombre de fois où l'urne i a été choisie en n épreuves indépendantes, la probabilité à chacune étant de $\frac{1}{n}$ donc $N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$ donc $E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

(b) X_i vaut 0 si l'urne i a été choisie au moins une fois et N_i vaut 0 si elle n'a jamais été choisie. Donc $N_i X_i = 0$.

(c) Les variables N_i et X_i ne sont pas indépendantes, car $E(N_i X_i) = 0 \neq E(N_i) E(X_i)$.

4. Voici le programme demandé :

```
n = int(input('Donner un entier n superieur ou egal a 2'))
x1 = 1
n1 = 0
for k in range(n):
  hasard = np.floor(np.random()*n) + 1
  if hasard == 1:
    x1 = 0 #on a choisi au moins une fois l urne 1
    n1 = n1+1 #on compte une boule manquante de plus
print(x1, n1)
```

Exercice 4 (EDHEC 2023)

1. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}}dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}}dx.$$

Soit $A > 1$.

$$\int_{1}^{A} \frac{c}{x^{1+c}}dx = \int_{1}^{A} cx^{-1-c}\ dx = c \times \frac{1}{-c}\left[x^{-c}\right]_1^A = -\left[\frac{1}{x^c}\right]_1^A = -\frac{1}{A^c} + 1.$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A^c} = 0$, on a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Ainsi, f est bien une densité.

2. $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $F(x) = 0$ si $x < 1$. Si $x \geq 1$, on a (en utilisant le calcul précédent) :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} f(t)dt = -\frac{1}{x^c} + 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. (a)
   - Si $x < 1$, $tx < t$ donc, sachant $(X > t)$, l'événement $(X \leq tx)$ est impossible. Donc $P_{(X>t)}(X \leq tx) = 0$.
   - Si $x \geq 1$, $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P([X > t] \cap [X \leq tx])}{P(X > T)}$. Or, comme

$$tx \geq t, \quad [X > t] \cap [X \leq tx] = [t < X \leq tx],$$

on a donc $P_{(X>t)}(X \leq tx) = \dfrac{P(t < X \leq tx)}{P(X > t)}$. On fait intervenir la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X \leq tx) &= \frac{F(tx)-F(t)}{F(t)} = \frac{\left(1-\dfrac{1}{(tx)^c}\right)-\left(1-\dfrac{1}{t^c}\right)}{\left(\dfrac{1}{t^c}\right)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{t^c}\left(1-\dfrac{1}{x^c}\right)}{\dfrac{1}{t^c}} = 1-\frac{1}{x^c}. \end{aligned}$$

(b) Le résultat précédent peut aussi s'écrire :

$$P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-\dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On retrouve la fonction de répartition F. Donc la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

4. $G(1) = P(Y \leq 1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(t)dt = 0$ car g est nulle sur $]-\infty, 1[$.

5. (a) Soit $x \geq 1$ et $t > 1$. On sait que $G(tx) - G(t) = P(t < Y \leq tx)$ et $1 - G(t) = P(Y > t)$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)} &= \frac{P(t < Y \leq tx)}{P(Y > t)} \\ &= \frac{P([Y > t] \cap [Y \leq tx])}{P(Y > t]} \end{aligned}$$

On reconnaît la définition d'une probabilité conditionnelle. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)} &= P_{(Y>t)}(Y \leq tx) = P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) \\ &= P(Y \leq x) \quad \text{car } \frac{Y}{t} \text{ sachant } (Y > t) \text{ a même loi que } Y \\ &= G(x) \end{aligned}$$

(b) G est la fonction de répartition d'une variable à densité donc G est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement aux points où sa densité g n'est pas continue, donc $\mathscr{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. G est bien $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
Soit $x \geq 1$, on va dériver la formule précédente par rapport à x (t étant considéré comme une constante).
$x \mapsto \dfrac{G(t)}{1-G(t)}$ est constante (ne dépend pas de x), donc sa dérivée par rapport à x est nulle.
$x \mapsto \dfrac{1}{1-G(t)}\ G(tx)$ a pour dérivée $\dfrac{1}{1-G(t)}\ tG'(tx)$.
On a bien

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1-G(t)}$$

(c) En tout u où G est $\mathscr{C}^1$, $G'(u) = g(u)$ donc

$$\forall x > 1, \forall t > 1 \quad g(x) = \frac{tg(tx)}{1-G(t)}.$$

On fait tendre x vers 1 à droite. g est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = c$ et $\lim_{x\to 1^+} g(tx) = g(t)$.

Donc $c = \dfrac{tg(t)}{1 - G(t)}$ qui peut s'écrire aussi $c - cG(t) = tG'(t)$.

On sait que $c > 0$ car g est strictement positive sur $[1, +\infty[$ donc en particulier en 1. En divisant par c, on obtient bien la relation :

$$G(t) + \frac{t}{c}\, G'(t) = 1.$$

6. (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c\, y(t)$. z est $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ par produit de fonctions $\mathscr{C}^1$. Pour tout $t > 1$,

$$z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t).$$

Pour tout $\in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} z(t) \text{ constante} &\iff z'(t) = 0 \\ &\iff ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 \\ &\iff y(t) + \frac{t}{c}\, y'(t) = 0 \quad \text{en multipliant par } \frac{1}{ct^{c-1}} \neq 0 \\ &\iff y \text{ solution de } (E_1) \end{aligned}$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_1) &\iff z(t) = K \\ &\iff t^c y(t) = K \\ &\iff y(t) = \frac{K}{t^c} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_1) sont les fonctions $t \mapsto y(t) = \dfrac{K}{t^c}$, avec $K \in \mathbb{R}$ constante.

(c) La fonction constante $u = 1$ est (évidemment) solution de (E_2).

(d) On a donc $u + \dfrac{t}{c}u' = 1$. Posons $z = h - u$.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\iff h + \frac{t}{c}\, h' = 1 \\ &\iff h + \frac{t}{c}\, h' = u + \frac{t}{c}\, u \\ &\iff (h - u) + \frac{t}{c}\, (h' - u') = 0 \\ &\iff z + \frac{t}{c}\, z' = 0 \\ &\iff (h - u) \text{ solution de } (E_1) \end{aligned}$$

(e) En utilisant la question 6.(b), $(h - u)(t) = \dfrac{K}{t^c}$ donc $h(t) = u(t) + \dfrac{K}{t^c} = 1 + \dfrac{K}{t^c}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \qquad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. (a) G est solutions de (E_2) donc : $\forall t > 1, \quad G(t) = 1 + \dfrac{K}{t^c}$.

Mais G est continue sur $\mathbb{R}$ et $G(t) = 0$ pour $t < 1$ et $\lim_{t\to 1^-} G(t) = 0$.

On a donc nécessairement $\lim_{t\to 1^+} G(t) = 0$.

Or $\lim_{t \to 1^+} 1 + \frac{K}{t^c} = 1 + K$, donc $1 + K = 0$ et, au final $K = -1$. Donc :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

(b) On a démontré que $G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$ sur $]1, +\infty[$.

On a vu que $G(1) = 0$ et, par ailleurs $1 - \frac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0$. On peut donc écrire :

$$\forall t \in [1, +\infty[\qquad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

On a $G(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 1[$ donc Y suit une loi de Pareto de paramètre c.

8. (a) $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Donc $H(x) = 0$ pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$

$$H(x) = P(Z \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-cx}.$$

Ainsi,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) On reconnaît une loi exponentielle de paramètre c donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

(c) On sait facilement simuler une variable Z suivant loi exponentielle de paramètre c, et après, il suffit d'en prendre l'exponentielle car $X = e^Z$.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)
    Z = np.exp(Z)
    return Z
```