Révisions 6

Correction du sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2009)

1. Pour tout polynôme P de E, on a $deg(P) \leq 2$ donc $deg(P') \leq 1$ et $deg(P'') \leq 0$. On en déduit que $deg(f(P)) \leq 2$, et $f(P) \in E$ donc f est une application de E dans E.

   D'autre part, on a pour tous P et Q de E et tout λ réel :

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)''-5(\lambda P+Q)'+6(\lambda P+Q)=\lambda P''+Q''-5\lambda P'-5Q'+6\lambda P+6Q \\ &= \lambda(P''-5P'+6P)+(Q''-5Q'+6Q)=\lambda f(P)+f(Q) \end{aligned}$$

   et f est linéaire. Donc f est un endomorphisme de E.

2. Pour tout x réel, on a :

   $f(e_0)(x)=0-5\times 0+6=6=6e_0(x)$ donc $f(e_0)=6e_0$.

   $f(e_1)(x)=0-5+6x=(6e_1-5e_0)(x)$ donc $f(e_1)=-5e_0+6e_1$.

   $f(e_2)(x)=2-5\times(2x)+6x^2=(6e_2-10e_1+2e_0)(x)$ donc $f(e_2)=2e_0-10e_1+6e_2$.

   Enfin on obtient :

$$A=M_{(e_0,e_1,e_2)}(f)=\begin{pmatrix}6 & -5 & 2\\ 0 & 6 & -10\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

3. A est inversible car elle triangulaire sans 0 sur la diagonale donc f est un isomorphisme. On a vu que c'est un endomorphisme de E donc c'est bien un automorphisme de E.

   On en déduit que f est injective, donc $ker(f)=\{0\}$.

4. A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. On en déduit que $Sp(A)=\{6\}$.

   Si A est diagonalisable, alors il existe P inversible et D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$. Comme $Sp(A)=\{6\}$, $D=6I_3$ et $A=P\times 6I_3\times P^{-1}=6I_3$ ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

5. Pour toute fonction u de classe C^∞, u' et u'' le sont aussi donc $g(u)=u''-5u'+6u$ est de classe C^∞ et g est bien une fonction de F dans F.

   De plus pour tous u,v de F et tout réel λ,

$$\begin{aligned} g(\lambda u+v) &= (\lambda u+v)''-5(\lambda u+v)'+6(\lambda u+v)=\lambda u''+v''-5\lambda u'-5v'+6\lambda u+6v \\ &= \lambda(u''-5u'+6u)+(v''-5v'+6v)=\lambda g(u)+g(v) \end{aligned}$$

   donc g est linéaire. Donc g est un endomorphisme de F.

6. (a) Il y a deux méthodes ici : soit par changement de variable en posant $v=u'$ soit en étudiant l'équation caractéristique. Faisons la première méthode ici et on fera la deuxième à la question suivante.

   En posant $v=u'$, on a :

$$u''-5u'=0 \Leftrightarrow v'-5v=0 \Leftrightarrow v(x)=\lambda e^{5x} \Leftrightarrow u'(x)=\lambda e^{5x} \Leftrightarrow u(x)=\frac{\lambda}{5}e^{5x}+\mu,$$

   où λ et μ sont des constantes réels. Donc les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$ sont :

$$S_1=\left\{x\mapsto \lambda e^{5x}+\mu \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}.$$

   On peut supprimer le 5 au dénominateur en posant $\lambda'=\dfrac{\lambda}{5}$.

(b) On a donc :

$$\begin{aligned} Ker(g-6Id) &= \{u \in F \mid (g-6Id)(u)=0\} \\ &= \{u \in F \mid g(u)-6u=0\} \\ &= \left\{u \in F \mid u''-5u'=0\right\} \\ &= \left\{x \mapsto \lambda e^{5x}+\mu \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect(u_1,u_2) \end{aligned}$$

avec u_1 la fonction constante égale à 1 et $u_2(x) = e^{5x}$. La famille (u_1, u_2) est donc génératrice de $Ker(g-5Id)$. Elle est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires. Donc c'est une base de $Ker(g-5Id)$.

7. (a) On résout l'équation caractéristique associée à $(\mathscr{E}_2)$:

$$r^2-5r+6=0 \Leftrightarrow (r-3)(r-2)=0 \Leftrightarrow r=2 \text{ ou } r=3.$$

Donc les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$ sont :

$$S_2 = \left\{x \mapsto \lambda e^{2x}+\mu e^{3x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned} Ker(g) &= \{u \in F \mid g(u)=0\} \\ &= \left\{u \in F \mid u''-5u'+6u=0\right\} \\ &= \left\{x \mapsto \lambda e^{2x}+\mu e^{3x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect(u_3,u_4) \end{aligned}$$

avec $u_3(x) = e^{2x}$ et $u_4(x) = e^{3x}$. La famille (u_3, u_4) est donc génératrice de $Ker(g)$. Elle est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires. Donc c'est une base de $Ker(g)$.

Exercice 2 (EDHEC 2009)

1. (a) Pour tout entier k, on a par indépendance de X et Y :

$$P(Z>k) = P((X>k)\cap(Y>k)) = P(X>k)\times P(Y>k).$$

Or, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X>k) &= 1-P(X \leq k) = 1-\sum_{i=1}^{k} P(X=i) = 1-\sum_{i=1}^{k} pq^{i-1} \\ &= 1-p\sum_{i=0}^{k-1} q^i = 1-p\frac{1-q^k}{1-q} = 1-(1-q^k) = q^k. \end{aligned}$$

Ce résultat est encore vrai pour $k=0$. Ainsi, pour tout entier naturel k, $P(X>k)=q^k$. On a de même pour Y (car X et Y suivent toutes les deux une loi géométrique de paramètre p). Finalement, pour tout entier naturel k,

$$P(Z>k) = P(X>k)\times P(Y>k) = q^{2k}.$$

(b) Comme Z ne prend que des valeurs entières, on a :

$$(Z>k-1) = (Z \geq k) = (Z=k)\cup(Z>k).$$

Par incompatibilité,

$$P(Z>k-1) = P(Z=k)+P(Z>k)$$

et donc

$$P(Z>k-1)-P(Z>k) = P(Z=k).$$

(c) Comme les valeurs possibles de X et de Y sont $\mathbb{N}^*$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, si $k \in \mathbb{N}^*$, on a avec les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(Z>k-1) - P(Z>k) = q^{2k-2} - q^{2k} = q^{2k-2}(1-q^2) \\ &= (1-(1-q^2))^{k-1}(1-q^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

2. (a) Si $X(\omega)$ est paire (non nulle car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$), alors $X(\omega)/2$ est un entier non nul.
Si $X(\omega)$ est impaire, alors $X(\omega)+1$ est paire non nul et $[X(\omega)+1]/2$ est un entier non nul.
Ainsi, T prend des valeurs entières non nulles.

(b) Soit k un entier naturel non nul alors $2k \in X(\Omega)$ et est pair. Donc $2k/2 = k \in T(\Omega)$.
Finalement, $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}^* \subset T(\Omega)$. Donc $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(c) $(T=k)$ peut être réalisé avec X pair auquel cas $X = 2k$, ou avec X impair, auquel cas $X = 2k-1$ (pour que $\dfrac{1+X}{2}$ soit égal à T). Donc :

$$\begin{aligned} P(T=k) &= P((X=2k) \cup (X=2k-1)) \\ &= P(X=2k) + P(X=2k-1) \quad \text{(par incompatibilité)}, \\ &= q^{2k-1}p + q^{2k-2}p \quad (\text{car } 2k \geq 1 \text{ et } 2k-1 \geq 1) \\ &= q^{2k-2}p(1+q) \\ &= q^{2k-2}(1-q)(1+q) \\ &= q^{2(k-1)}\left(1-q^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, T suit également une loi $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$, comme Z.

3. Voici le programme demandé :

```
p = input("donner p :")
x = 1
while rd.random()>p :
    x = x+1
if (-1)**x == 1:
    t = x/2
else:
    t = (1+x)/2
print(t)
```

Exercice 3 (EDHEC 2003)

1. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	||	$+$	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$ et $\dfrac{e^x-1}{x} > 0$ comme composée de fonctions continues.

   En 0 : $e^x - 1 \sim x$ donc $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ et $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \to 0$ (par continuité de ln en 1). Donc $f(x) \to f(0)$ et f est continue en 0.

   Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)}.$$

4. On utilise le développement limité de exp en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(x-1)+1}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{x + x^2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1}{x(e^x-1)} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(e^x-1)} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x \times x} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. (a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x$ d'où ses variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

   (b) Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$ avec $g(x) > 0$ et $x(e^x-1) > 0$. On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Pour les limites :

   - En $+\infty$: $\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x\left[1-e^{-x}\right]}{x} \to +\infty$ par croissances comparées.
   - En $-\infty$: $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \to -\infty$.

6. Par récurrence :

Ini. $u_0 > 0$.

Héré. Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n > 0$.
Par stricte croissance de f, $f(u_n) > f(0)$ donc $u_{n+1} > 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Ccl. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

7. (a) Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = f(-x) \end{aligned}$$

(b) Si $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le tableau de variation de f.
Donc avec l'égalité de la question précédente, $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a en prenant $x = u_n$ dans l'inégalité de la question précédente : $f(u_n) - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

8. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en ℓ et donc $f(\ell) = \ell$.

Comme $f(x) - x = f(-x)$ et ne s'annule qu'en 0, on a donc $\ell = 0$.

Donc la suite (u_n) converge vers 0 en $+\infty$.

9. Voici le programme `Python` demandé :

```python
u = 1
n = 0
while u > 10**(-3):
    u = np.log((np.exp(u)-1)/u)
    n = n+1
print(n)
```

Exercice 4 (EDHEC 2019)

1. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x_0 = 1$.

Calculons $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$:

$$I = \int_{-\infty}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Pour $A \geq 1$,

$$\frac{1}{\theta}\int_1^A x^{-1-1/\theta}\, dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^{-1-1/\theta+1}}{-1+1/\theta+1}\right]_1^A = -\left[x^{-1/\theta}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^{1/\theta}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $I = 1$ et f est bien une densité.

2. Déterminons les conditions d'existence et la valeur des moments d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} m_n(x) \text{ existe } &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx \quad \text{converge} \iff \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{x^{1+1/\theta}}\,dx \quad \text{converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+1/\theta-n}}\,dx \quad \text{converge} \\ &\iff 1+\frac{1}{\theta}-n>1 \iff n<\frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

Or $\theta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ donc $\frac{1}{\theta} \in]2,+\infty[$. Donc $m_n(X)$ existe pour $n=1$ et $n=2$.
$E(X)$ et $E(X^2)$ existent donc $V(X)$ existe.
Pour $n \leq 2$, $m_n(X) = \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{-1-1/\theta+n}\,dx$. On a alors :

$$m_n(X) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\theta} \times \frac{1}{-1/\theta+n}\left[x^{-1/\theta+n}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{n\theta-1}\left(\frac{1}{A^{-1/\theta+n}}-1\right) = \frac{1}{1-n\theta}$$

En particulier $E(X) = \frac{1}{1-\theta}$ et $E(X^2) = \frac{1}{1-2\theta}$. Avec Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = \frac{1}{1-2\theta} - \frac{1}{1-\theta^2} = \frac{(1-\theta)^2-(1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2} = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}.$$

Finalement, on a obtenue $E(X) = \frac{1}{1-\theta}$ et $V(X) = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
Pour $x<1$, $F(x)=0$.
Pour $x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = 1-\frac{1}{x^{1/\theta}}$ (voir calculs de la question 1).

4. (a) Nécessairement, $F(x) = \frac{1}{2}$ est impossible si $x<1$. Pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x)=\frac{1}{2} &\iff 1-\frac{1}{x^{1/\theta}} = \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1}{x^{1/\theta}} = \frac{1}{2} \\ &\iff x^{1/\theta} = 2 \\ &\iff \frac{1}{\theta}\ln(x) = \ln(2) \\ &\iff x = e^{\theta\ln(2)} = 2^\theta \end{aligned}$$

Donc $M_e = 2^\theta$.

(b) $2^x(1-x) \leq 1 \iff x\ln(2)+\ln(1-x) \leq 0$.
Posons $h(x) = x\ln(2)+\ln(1-x)$ pour $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.
h est C^∞ et $h'(x) = \ln(2) - \frac{1}{1-x} = \frac{-x\ln(2)-1+\ln(2)}{1-x}$ qui est du signe du numérateur.
Or $-1+\ln(2)$ est négatif donc $h'(x)<0$. h est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $h(0)=0$.
Donc $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right], \quad 2^x(1-x) \leq 1$.

(c) $E(X) - M_e = \dfrac{1}{1-\theta} - 2^\theta = \dfrac{1-2^\theta(1-\theta)}{1-\theta} \geq 0$ d'après ce qui précède.

Donc $\forall \theta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $E(X) \geq M_e$.

5. (a) On a :

$$\begin{aligned} P_{(X>a)}(X > a+b) &= \frac{P((X > a+b) \cap (X > a))}{P(X > a)} = \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} \\ &= \frac{1 - F(a+b)}{1-F(a)} = \frac{\dfrac{1}{(a+b)^{1/\theta}}}{\dfrac{1}{a^{1/\theta}}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta} \end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{a+\infty} \dfrac{a}{a+b} = 1$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} P_{(X>a)}(X > a+b) = 1$.
On peut interpréter cela en remarquant que si l'appareil fonctionne longtemps, il est presque certain qu'il fonctionne beaucoup plus longtemps.

6. (a) $G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$ (par croissance de exp).

(b) Si $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $F(e^x) = 1 - \dfrac{1}{(e^x)^{1/\theta}} = 1 - e^{-x/\theta}$

Si $x < 0$, $e^x < 1$ donc $F(e^x) = 0$.
Ainsi, $G(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ si $x \geq 0$ et $G(x) = 0$ sinon.

On reconnaît une loi exponentielle : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$

7. On utilise les instructions :

```python
def simulX(theta):
    lambda = 1/theta
    Y = rd.exponentielle(1/lambda)
    X = np.exp(Y)
    return(X)
```

8. (a) T_n est un estimateur de θ car c'est une fonction ne dépendant pas de θ et dépendant des variables aléatoires Y_k identiques et indépendantes. C'est l'estimateur de référence pour estimer $E(Y) = \theta$ appelé moyenne empirique.

(b) Par linéarité de l'espérance,

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n} \times n\theta = \theta.$$

Pour la variance :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) \quad \text{(par indépendance des } Y_k\text{)} \\ &= \frac{nV(Y)}{n^2} = \frac{V(Y)}{n} = \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

9. (a) Comme T_n admet une variance, on peut appliquer l'inégalité de BT :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

(b) L'inégalité précédente donne ici : $P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$ donc $P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.
Or :

$$\begin{aligned} |T_n - \theta| < \varepsilon &\implies |T_n - \theta| \leq \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon \leq T_n - \theta \leq \varepsilon \\ &\iff T_n - \varepsilon \leq \theta \leq T_n + \varepsilon \\ &\iff \theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon] \end{aligned}$$

On a donc :

$$P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}.$$

(c) $\theta \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\theta^2 \leq \dfrac{1}{4}$. Avec $n = 1000$, $\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2}$ donc $1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \dfrac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2}$
On cherche ε pour avoir $1 - \dfrac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2} \geq 0,9$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2} \geq 0,9 &\iff \frac{1}{4 \times 10^3 \varepsilon^2} \leq 0,1 \\ &\iff 4 \times 10^2 \varepsilon^2 \geq 1 \\ &\iff \varepsilon^2 \geq \frac{1}{400} \\ &\iff \varepsilon \geq \frac{1}{20} \end{aligned}$$

On prend $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$, c'est-à-dire $\varepsilon = 0,05$, on a donc, avec $n = 1000$: $P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq 0,9$.
On peut conclure : $[T_{1000} - 0,05; T_{1000} + 0,05]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $0,9$.
