Révisions 6

Correction du sujet ECRICOME

Exercice 1 (ECRICOME 2023)

1. (a) La famille $\mathcal{B}$ est constituée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace vectoriel de dimension 4. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0 \iff \begin{cases} -a+d &= 0 \\ a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ a+d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ -b+c+d &= 0 \\ b-c+d &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ 2c+d &= 0 \\ -2c+d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ 2c+d &= 0 \\ 2d &= 0 \end{cases}$$
$$\iff a = b = c = d = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Il faut commencer par exprimer les images par f des quatre vecteurs de $\mathcal{B}$, qu'on ne manque pas d'exprimer en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$.

- $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_1) = 0$.
- $A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_2) = 0$.
- $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_3) = 2u_3$.
- $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ donc $f(u_4) = 2u_4 + u_3$.

Ceci permet d'écrire

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

(c) En notant P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ (qui est donc bien inversible), la formule de changement de base donne bien

$$A = PTP^{-1},$$

où

$$T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

est bien triangulaire (supérieure) et

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) C'est un calcul.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On constate qu'on a bien

$$\begin{aligned} 4A^2 - 4A &= 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A^3. \end{aligned}$$

(b) Procédons donc par récurrence en construisant les termes de la suite de proche en proche.

Ini. Pour $n = 1$, $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$. En posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, la relation est vraie pour $n = 1$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA^2 + b_nA$. Il suit que

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \\ &\underset{\text{H.R}}{=} A\left(a_nA^2 + b_nA\right) \\ &= a_nA^3 + b_nA^2 \\ &= a_n(4A^2 - 4A) + b_nA^2 \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_nA. \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a bien

$$A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A,$$

Ccl. Par récurrence, on a donc le résultat demandé.

3. (a) Soit $n \geq 1$. D'après ce qui précède

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

et la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) On associe à la suite son équation caractéristique $q^2 - 4q + 4 = 0$ qui admet une unique solution $q = 2$. D'après le cours, on peut alors affirmer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$a_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$

Pour déterminer λ et μ, on injecte les valeurs des deux premières termes : $a_1 = 0$ et $a_2 = 4a_1 + b_1 = 1$ ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2(\lambda + \mu) & = & 0 \\ 4(\lambda + 2\mu) & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -1/4 \\ \mu & = & 1/4 \end{array} \right.$$

et on peut conclure que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{4}(-1 + n)2^n = (n-1)2^{n-2}.$$

(c) Pour tout $n \geq 2$, on a $b_n = -4a_{n-1}$ et donc

$$b_n = -4(n-1-1)2^{n-1-2} = -(n-2)2^{n-1}.$$

On remarque que cette formule est encore valide pour $n = 1$.

4. En faisant le bilan de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

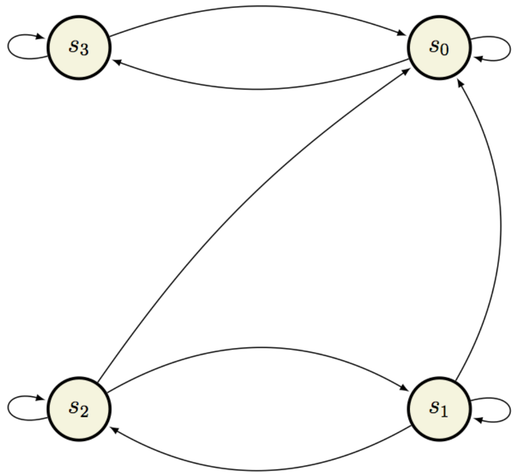
$$\begin{aligned}
A^n &= a_n A^2 + b_n A \\
&= (n-1)2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2} \left((n-1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu !

5. (a) On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice $M = (a_{i,j})$ dont chaque terme $a_{i,j}$ est égal à 1 ou à 0 selon qu'il existe une arrête orientée allant du sommet i vers le sommet j.

(b) Soient n un entier non nul, i un entier de $[\![1, p]\!]$ et j un entier de $[\![1, p]\!]$.
Le coefficient situé à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne de M^n est le nombre de chemins de longueur n du sommet i au sommet j.

6. (a) Le diagramme correspondant est le suivant :



(b) Il n'existe pas de chemin orienté de s_3 vers s_2 : le graphe n'est pas connexe (on dira plutôt qu'il n'est pas *fortement connexe*). On peut aussi aller chercher un résultat du cours :
"*Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients **strictement** positifs.*"
Ce qui n'est pas le cas dans l'exercice car il y a des coefficients nuls quand on calcule $I + A + A^2 + A^3$.

(c) Comme énoncé ci-avant le nombre de chemins de longueur n du sommet s_3 au sommet s_0 est donné par le coefficient à la $4-$ième ligne et première colonne de la matrice A^n. D'après les résultats de la Partie 1, il y en a donc 2^{n-1}.

7. Pour écrire la fonction demandée, il faut parcourir les lignes de la matrice d'adjacence et tester si le coefficient $a_{i,j}$ est nul ou non ce qui indiquera si le sommet s_{i-1} est voisin du sommet s_{j-1}. On propose alors le programme suivant

```python
def matrice_vers_liste(A) :
    p = len(A)
    L = []
    for i in range(p) : # on parcourt la ligne i
        L.append([ ]) # une nouvelle sous-liste
        for j in range(p) : # on parcourt la colonne j
            if A[i][j] ==1 :
                L[i].append(j) # le sommet j est voisin du sommet i
    return L
```

8. On chercher à écrire une fonction en langage Python permettant d'obtenir la longueur du plus court chemin menant d'un sommet de départ s_i à chaque sommet du graphe. On aura reconnu un algorithme très proche de l'algorithme de Dijkstra.

(a) En suivant les étapes de l'algorithme décrit, on obtient la liste `[1, 0, 1, 2]`.

(b) On complète l'algorithme

```python
def parcours(L, i0):
    p = len(L)
    distances = [p]*p # liste de p éléments valant p
    distances[i0] = 0
    a_explorer = [i0]
    marques = [i0]
    while a_explorer != [ ] :
```

```
        s = a_explorer[0] # on prend le premier terme de la liste
        del a_explorer[0] # on l'enlève de la liste
        for v in L[s] : # pour tous les sommets voisins de s
            if v not in marques : # si il n'est pas marqué
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v]=distances[s]+1
    return distances
```

(c) Le programme précédent renvoie la liste des distances mais elle est initialisée à p. Si c'est toujours p après exécution de l'algorithme c'est qu'aucun chemin n'a été trouvé. Sinon la longueur serait inférieure ou égale à $p-1$ vu qu'il y a p sommets. Ainsi, en remplaçant le `return distances` par les commandes suivantes

```
chemins = []
for k in range(p) :
    if distances[k] < p :
        chemins.append(k)
return chemins
```

on obtient bien la liste voulue.

Exercice 2 (ECRICOME 2020)

1. La fonction
$$g_n : t \mapsto \frac{t^{2n}-1}{t+1}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc g_n admet une primitive G_n sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \geq 0$:
$$f_n(x) = [G_n(t)]_0^x = G_n(x) - G_n(0).$$
Comme G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a
$$f_n'(x) = G_n'(x) = g_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

2. Le signe de $f_n'(x)$ est donné par celui de son numérateur. Or,
$$x^{2n} - 1 \geq 0 \iff x^{2n} \geq 1 \geq 0 \iff x \geq 1 \quad \text{car } x \in \mathbb{R}_+.$$
On peut alors dresser le tableau de variations de f_n.

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	

3. f_n' est quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc f_n' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et f_n est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n}-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}.$$

Il est clair que, pour tout $x \geq 0$, $f_n''(x) \geq 0$ (le numerateur est somme de multiplies positifs de puissances de x; le dénominateur est un carré). Ainsi, f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. (a) On peut montrer ce résultat de plusieurs manières; on choisit ici une preuve relativement élégante. Si $x > 1$, observons que

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

ce qui donne $x^n - 1 \geq n(x-1)$ pour tout $x > 1$. Cette inégalité s'étend naturellement à $x = 1$ (les deux membres sont nuls). En l'appliquant à $x = t^2$ (si $t \geq 1$, on a bien $t^2 \geq 1$), on a l'inégalité voulue.

(b) Comme $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, on a, pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n(t-1)$$

Soit $x \geq 1$. Par positivité de l'intégrale et par la relation de Chasles

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &\geq f_n(1) + n\int_1^x (t-1)\mathrm{d}t \\ &= f_n(1) + n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x \\ &= f_n(1) + n\frac{(x-1)^2}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

(c) Lorsque $x \to +\infty$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers $+\infty$. Par théorème de comparaison, on peut conclure que

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

5. Comme $f_n(0) = 0$ et que f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$, il suit que $f_n(1) < f_n(0) = 0$.

6. Chercher les solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ revient à chercher les antécédents de 0 par f_n.

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est strictement décroissante sur $]0;1]$ et y réalise donc une bijection (par le théorème du même nom) vers $[f_n(1);0[$. Cet intervalle ne contient pas 0 qui n'admet donc aucun antécédent par f_n sur $]0;1]$.

D'autre part, f_n est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et réalise donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]f_n(1);+\infty[$, qui cette-fois contient 0. Ainsi, 0 admet un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}_+$ et cet antécédent est strictement supérieur à 1. On le note x_n :

$$f_n(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_n.$$

7. Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-1}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}(t^2-1)}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^x t^{2n}(t-1)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8. (a) Soit $x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$. Alors $\frac{x}{2n+2} \geq \frac{1}{2n+1}$ donc $\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \geq 0$.
D'après la question précédente, on a donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

(b) On applique le résultat précédent à $x = x_n$ (ce qui est licite par l''hypothèse admise en début de partie). Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0.$$

(c) Comme f_{n+1} est bijective et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et que x_n et x_{n+1} en sont éléments, on a

$$f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \Longrightarrow x_n \geq x_{n+1}$$

et la suite (x_n) est décroissante. Celle-ci étant également minorée par 1, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge, vers une certaine limite (que l'on peut noter ℓ) vérifiant $\ell \geq 1$.

9. (a) On sait déjà que $f_n(1) \leq 0$. Montrons que $f_n(1) \geq -\ln(2)$. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a $t^{2n} - 1 \geq -1$. Il suit (comme $t + 1 \geq 0$) que

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{-1}{t+1}$$

puis, par positivité de l'intégrale,

$$f_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{(-1)}{t+1}\mathrm{d}t = -[\ln(1+t)]_0^1 = -\ln(2),$$

ce qui donne bien ce qu'on voulait.

(b) On applique l'inégalité obtenue en 4b à $x = x_n$. D'après la question précédente, $0 \leq -f_n(1) \leq \ln(2)$ et on obtient

$$(x_n - 1)^2 \leq \frac{2}{n}\left(f_n(x_n) - f_n(1)\right) = -\frac{2}{n}f_n(1) \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$

Comme on sait que $x_n \geq 1$ (et donc $x_n - 1 \geq 0$) ceci donne bien, en prenant la racine qui est une fonction croissante

$$0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

Le membre de droite tend clairement vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème d'encadrement, on a $x_n - 1 \to 0$, $n \to +\infty$, ce qui permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

10. Les fonctions $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiales) et donc sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par composition avec la fonction f_n de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $(x,y)\mapsto f_n(x)$ et $(x,y)\mapsto f_n(y)$ sont aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et par produit c'est encore le cas de G_n.
    On a alors, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}\partial_1 G_n(x,y) &= f_n(y)\times f_n'(x)=\left(\int_0^y \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{x^{2n}-1}{x+1}\\ \partial_2 G_n(x,y) &= f_n(x)\times f_n'(y)=\left(\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{y^{2n}-1}{y+1}\end{aligned}$$

11. On résout

$$\begin{aligned}(x,y)\text{ point critique de }G_n &\iff \begin{cases}\partial_1 G_n(x,y) &= 0\\ \partial_2 G_n(x,y) &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} f_n(x)f_n'(y) &= 0\\ f_n(y)f_n'(x) &= 0\end{cases}\end{aligned}$$

Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, f_n ne s'annule qu'en x_n et f_n' ne s'annule qu'en 1 (et $x_n\neq 1$ donc f_n et f_n' ne peuvent s'annuler en même temps). Ainsi,

$$\begin{aligned}\begin{cases} f_n(x)f_n'(y) &= 0\\ f_n(y)f_n'(x) &= 0\end{cases} &\iff \begin{cases} f_n(x) &= 0\\ f_n(y) &= 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f_n'(y) &= 0\\ f_n'(x) &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x &= x_n\\ y &= x_n\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= 1\\ y &= 1\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, G_n admet deux points critiques: (x_n,x_n) et $(1,1)$.

12. On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}G_n(x,y) &= f_n(y)f_n''(x)\\ \partial^2_{1,2}G_n(x,y) &= \partial^2_{2,1}G_n(x,y)=f_n'(x)f_n'(y)=\frac{x^{2n}-1}{x+1}\times\frac{y^{2n}-1}{y+1}\\ \partial^2_{2,2}G_n(x,y) &= f_n(x)f_n''(y)\end{aligned}$$

On forme alors les matrices hessiennes (on rappelle que $f_n(x_n)=0$ et que $f_n'(1)=0$). De plus, observant que

$$f_n'(x_n)^2=\left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2,$$

et

$$f_n''(1)=n$$

on peut écrire

$$\nabla^2(G_n)(x_n,x_n)=\left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

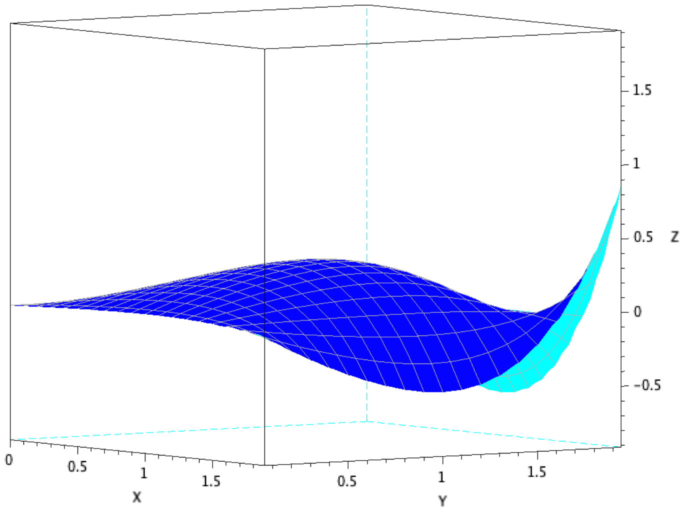
et

$$\nabla^2(G_n)(1,1)=nf_n(1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

13. Les valeurs propres de $\nabla^2(G_n)(x_n,x_n)$ sont de même signe que celle de la matrice $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ dont le spectre est $\mathrm{Sp}(M)=\{1,-1\}$ (qu'on obtient en résolvant $\lambda^2-1=0$ correspondant au fait que $M-\lambda I_2$ ne soit pas inversible). Les deux valeurs propres sont de signes opposés; G_n présente un point selle en (x_n,x_n).

14. En $(1,1)$, la hessienne est déjà diagonale, ses valeurs propres (qui sont ses coefficients diagonaux) sont strictement négatives (car $nf_n(1) < 0$ car $f_n(1) < 0$). Ainsi, G_n présente un maximum local en $(1,1)$ (ce maximum vaut $G_n(1,1) = f_n(1)^2$).

On ne résiste pas, pour le plaisir des yeux, à l'envie de joindre une représentation de la surface $z = G_n(x,y)$ pour $n = 2$ sur $]0;2]\times]0;2]$ obtenue avec `Python`.



Exercice 3 (ECRICOME 2022)

1. (a) En interprétant comme succès "le jeton est placé dans l'urne 1 (dont la probabilité est égale à $1/3$) (resp. 2, 3)", X_n (resp. Y_n, Z_n) correspond à une répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. On peut donc conclure que X_n, Y_n et Z_n suivent toutes trois une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$.

   (b) D'après le cours,
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \text{et} \qquad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

   (c) $[(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)]$ signifie qu'après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun : on a donc placé tous les jetons (au nombre de n) dans l'urne 1, c'est à dire que $(X_n = n)$. On a bien l'égalité voulue.

   (d) Il est clair que
$$V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0).$$

   (e) Par la formule du crible, on a
$$\begin{aligned} P(V_n) &= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) \\ &\quad -P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) - P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) - P((Z_n = 0) \cap (X_n = 0)) \\ &\quad +P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) \end{aligned}$$
   Or, les trois urnes ne peuvent pas être simultanément vides après avoir placé n jetons donc
$$P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = 0$$
   et par ce qui précède (en reproduisant le raisonnement)
$$\begin{aligned} P((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)) &= P((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)) = P((Z_n = 0) \cap (X_n = 0)) \\ &= P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$
   Finalement,
$$P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On note V l'événement : "Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide". On constate qu'on peut écrire
$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$
En effet, si au moins une urne reste toujours vide, on a donc la réalisation de V_n pour tout n. Or la suite d'évènements (V_n) est décroissante au sens de l'inclusion :
$$V_{n+1} \subset V_n$$
(si au moins une des urnes est vide après les $n+1$ premiers jetons, elle l'était nécessairement après n'avoir placé que les n premiers). Par le théorème de la limite monotone, on a donc
$$P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.\right) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n) = 0$$
car $(2/3)^n \to 0$ et $(1/3)^n \to 0$ également.

3. (a) On complète ce programme sans difficulté. On va continuer à ajouter des jetons tant qu'il y a au moins un zéro dans la liste correspondant au nombre de jetons par urne. Pour cela, on cherche on utilise la commande `0 in liste`.

```python
def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X, Y, Z]
    while 0 in liste :
        i = rd.randint(0, 3) #choix d'un entier entre 0 et 2
        liste[i] = liste[i] + 1 #l'urne i+1 a un jeton sup.
        n=n+1
    return(n)
```

Une alternative pour la condition dans la boucle `while` serait de continuer tant que la minimum de la `liste` est égal à 0

```python
while min(liste) == 0 :
```

(b) On peut obtenir une valeur approchée de l'espérance d'une variable (quand celle-ci existe) à l'aide de la moyenne empirique d'un n-échantillon de cette variable, avec n aussi grand que possible. Ici, le sujet propose $n = 10000$. On stocke donc 10000 réalisations de la variable T simulée avec la fonction ci-avant et on en fait la moyenne.

```python
S = np.zeros(10000)
for k in range(10000)
    S[k] = T()
print(np.mean(S))
```

4. Il faut au moins placer 3 jetons si on veut espérer remplir les 3 urnes, mais on peut attendre arbitrairement longtemps, en remplissant successivement les mêmes urnes. On a donc clairement $T(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$.

5. Soit $n \geq 3$. Observons que
$$(T = n) \cup V_n = V_{n-1}.$$

En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) : ou bien il reste encore au moins une urne vide après le n-ième jeton (c'est à dire V_n) ou bien, on remplit toutes les urnes pour la première fois avec le n-ième jeton (c'est à dire $(T=n)$). L'incompatibilité donne bien

$$P(T=n)+P(V_n)=P(V_{n-1}) \Longleftrightarrow P(T=n)=P(V_{n-1})-P(V_n).$$

6. On peut commencer par expliciter la loi de T. D'après les questions précédentes, on a, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} P(T=n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}-1\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

On revient ensuite à la définition de l'espérance.

$$\begin{aligned} T \text{ admet une espérance} &\Longleftrightarrow \sum nP(T=n) \text{ converge (absolument)} \\ &\Longleftrightarrow \sum n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ converge} \end{aligned}$$

Or,

$$n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (de raisons respectives $2/3$ et $1/3$ appartenant à $]-1,1[$). Donc T admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(1-2/3)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

7. (a) Commençons par observer qu'après avoir placé 2 jetons, on a entre 1 et 2 urnes vides. Connaissant combien de jetons contient l'urne 1 grâce à X_2, on sait ce qui se passe. On peut écrire le tableau de la loi conjointe. On introduit aussi N_i la variable qui renvoie le numéro de l'urne dans laquelle on place le jeton i. D'après les hypothèses, les variables N_i sont indépendantes et suivent toutes des lois uniformes sur $[\![1;3]\!]$.

$$\begin{aligned} P((X_2=0)\cap(W_2=1)) &= P(((N_1=2)\cap(N_2=3))\cup((N_1=3)\cap(N_2=2))) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((X_2=0)\cap(W_2=2)) &= P(((N_1=2)\cap(N_2=2))\cup((N_1=3)\cap(N_2=3))) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P((X_2=1)\cap(W_2=1)) &= P(((N_1=1)\cap(N_2=2))\cup((N_1=1)\cap(N_2=3)) \\
&\quad \cup((N_1=2)\cap(N_2=1))\cup((N_1=3)\cap(N_2=1))) \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P((X_2=1)\cap(W_2=2)) &= 0 \quad \text{(impossible)} \\
P((X_2=2)\cap(W_2=1)) &= 0 \quad \text{(impossible)}
\end{aligned}$$

$$P((X_2=2)\cap(W_2=2)) = P((N_1=1)\cap(N_2=1))=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

Ce qui donne le tableau :

$X_2\backslash W_2$	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

(b) Avec le SCE $(X_2=i)_{0\leq i\leq 2}$, on a (par incompatibilité à la deuxième égalité) :

$$\begin{aligned}
& P(W_2=1) \\
=\ & P(((X_2=0)\cap(W_2=1))\cup((X_2=1)\cap(W_2=1))\cup((X_2=2)\cap(W_2=1))) \\
=\ & P((X_2=0)\cap(W_2=1))+P((X_2=1)\cap(W_2=1))+P((X_2=2)\cap(W_2=1)) \\
=\ & \frac{2}{9}+0+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Donc $P(W_2=2)=1-P(W_2=1)=\dfrac{2}{3}$.

(c) La covariance de W_2 et X_2 se calcule avec la formule

$$\operatorname{cov}(X_2,W_2)=E(X_2W_2)-E(X_2)E(W_2).$$

Connaissant la loi de X_2 (le cours donne $E(X_2)=2/3$) et la loi de W_2 par la question précédente, on a $E(W_2)=4/3$. Le tableau de la loi conjointe donne

$$E(X_2W_2)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1} ijP((X_2=1)\cap(W_2=j))=4/9+4/9=8/9$$

et au final, on trouve

$$\operatorname{cov}(X_2,W_2)=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=0.$$

(d) La covariance des deux variables est nulle, mais attention, il ne s'agit pas de conclure qu'elles sont indépendantes : c'est la réciproque qui est vraie. Ici, elle ne sont pas indépendantes. On peut proposer comme contre-exemple

$$P((X_2=1)\cap(W_2=2))=0\neq P(X_2=1)P(W_2=2).$$

8. On peut avoir placé tous les jetons dans la même urne (auquel cas $W_n=2$), ou dans deux urnes différentes (auquel cas $W_n=1$) ou dans les trois (ce qui donne $W_n=0$). Donc $W_n(\Omega)=[\![0,2]\!]$.

9. (a) $W_{n,i}$ est une variable de Bernoulli. Son espérance est donc égale à son paramètre. L'urne 1 (resp. 2, 3) est vide si $X_n = 0$ (resp. $Y_n = 0$, $Z_n = 0$). Les trois évènements susmentionnés ayant la même probabilité on a, pour tout $i \in \{1,2,3\}$

$$E(W_{n,i}) = P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Il est clair que

$$W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}.$$

(c) Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

10. Comme

$$(X_n = n) = (X_n = n) \cap (W_n = 2),$$

on a

$$P\left((X_n = n) \cap (W_n = 2)\right) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'autre part, si $W_n = 2$ alors tous les jetons sont placés dans la même urne. Chaque urne contient donc 0 ou n jetons et donc

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad P\left((X_n = k) \cap (W_n = 2)\right) = 0.$$

11. On s'intéresse, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, à l'évènement $(X_n = k) \cap (W_n = 1)$.

Cet évènement signifie qu'on a placé k des n jetons dans l'urne 1 et les $n-k$ jetons restants dans une (et même) autre urne. Il y a 2 façons de choisir la deuxième urne à remplir. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k jetons parmi les n que l'on va mettre dans l'urne 1, les autres étant automatiquement placés dans la deuxième urne choisie. Pour chacune de ces possibilités, la probabilité est $(1/3)^n$. On a bien

$$P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) = 2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Naturellement, si $(X_n = n)$ tous les jetons sont placés dans la même urne et il y en a deux qui restent vides; ainsi

$$P((X_n = n) \cap (W_n = 1)) = 0.$$

12. Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
E(X_n W_n) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{2} kiP((X_n = k) \cap (W_n = i)) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} kiP((X_n = k) \cap (W_n = i)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP((X_n = k) \cap (W_n = 1)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} 2kP((X_n = k) \cap (W_n = 2)) \\
&\quad + 2nP((X_n = n) \cap (W_n = 2)) \\
&= 2nP((X_n = n) \cap (W_n = 2)) + \sum_{k=1}^{n-1} kP((X_n = k) \cap (W_n = 1)) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP((X_n = k) \cap (W_n = 1)).
\end{aligned}$$

13. On va utiliser la formule classique (valable si $k \neq 0$) :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On poursuit alors le calcul en ajoutant le résultat obtenu plus haut.

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1) = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{n-1} \qquad \text{(formule du binôme)} \\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

On calcule ensuite la covariance avec la même formule que plus haut. Comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$, on a $E(X_n) = \frac{n}{3}$. Donc :

$$\text{cov}(X_n, W_n) = E(X_nW_n) - E(X_n)E(W_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

14. La covariance précédente est nulle, pourtant (tout comme précédemment pour $n = 2$) les variables X_n et W_n ne sont pas indépendantes. Ceci fournit un nouveau contre-exemple à la réciproque du résultat du cours affirmant que si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.
