Révisions 7

Correction du sujet EML

Exercice 1 (EML 2023 - Sujet zéro)

1. (a) Appelons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A. On a : $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -C_1$. Ainsi toutes les colonnes de la matrice A sont proportionnelles à la première colonne : elle est de rang 1.

   (b) Comme A est de rang 1, elle n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A. De plus, on a avec le théorème du rang :

$$\dim(Ker(A)) = 3 - rg(A) = 2$$

   Les relations $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -C_1$ assurent que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A. Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une base de $E_0(A) = Ker(A)$.

   (c) On calcule AX_3 et on trouve $6X_3$. Comme X_3 est non nul, 6 est valeur propre de A et X_3 est un vecteur propre associé.

   (d) Par concaténation de familles libres (2 vecteurs non colinéaires et un vecteur non nul) de $E_0(A)$ et $E_6(A)$, (X_1, X_2, X_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme elle est de cardinal $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Le système différentiel (SH) s'écrit sous forme matriciel $X' = AX$ où $X : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et x, y z sont des fonctions dérivables. On sait alors, d'après le cours, que :

$$X(t) = \lambda_1 e^{0\times t} X_1 + \lambda_2 e^{0\times t} X_2 + \lambda_3 e^{6\times t} X_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 e^{6t} \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 e^{6t} \\ \lambda_2 - \lambda_3 e^{6t} \end{pmatrix}.$$

   Ainsi X est solution de (SH) si et seulement s'il existe λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout t réel :

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) = -\lambda_1 + 2\lambda_3 e^{6t} \\ z(t) = \lambda_2 - \lambda_3 e^{6t} \end{cases}$$

3. Il y a existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy donc les solutions X_1 et X_2 sont égales.

4. (a) $X : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de (SH) et vérifie $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, c'est la solution cherchée.

   (b) Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ la solution du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il existe α, β et γ réels tels que pour tout t réel :

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve que : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$.

5. (a) Le vecteur colonne $B(t) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t qui permet d'écrire le système (S) sous la forme $(S)\ \ X' = AX + B(t)$ est : $B(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

   (b) Si Y est solution de (S), on a l'égalité $B = Y' - AY$. Ainsi on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } (S) &\Leftrightarrow X' = AX + B \\ &\Leftrightarrow X' = AX + Y' - AY \quad (\text{car } Y \text{ est solution de } (S)) \\ &\Leftrightarrow (X - Y)' = A(X - Y) \quad (\text{par linéarité de la dérivation}) \\ &\Leftrightarrow X - Y \text{ est solution de } (SH) \end{aligned}$$

   (c) On vérifie que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$:

$$AY(t) + B(t) = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 2e^t - 2 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2(1 - e^t) \\ e^t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y'(t).$$

D'après les questions 2 et 5.(b), la solution générale de (S) sur $\mathbb{R}$ est :

$$t \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (EML 2019)

1. f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

2. D'après la question précédente, f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f\big([1,+\infty[\big) = [2,+\infty[$.

3. (a) On déduit du tableau de variation de f celui de g :

x	2	$+\infty$
$g(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

(b) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule par sur cet intervalle. Donc g est dérivable sur $]2,+\infty[$ et on a la formule (non demandée) :

$$\forall x \in]2,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

(c) Soit $y \in [2,+\infty[$ fixé. On cherche $t \in]0,+\infty[$ tel que $y = f(t)$. On a :

$$y = f(t) \Leftrightarrow y = t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow ty = t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - ty + 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation polynomiale obtenue est $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 2$. Ainsi :

$$y = f(t) \Leftrightarrow t = \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2},$$

et les deux solutions obtenues sont bien strictement positives.
On sait que, pour tout $y \in [2,+\infty[$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$y = f(t) \quad \Leftrightarrow t = g(y).$$

Donc $g(y)$ est égal à l'unique solution $t \geq 1$ de l'équation $y = f(t)$. Or

$$\frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{y}{2} \geq 1\,,$$

donc

$$g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}.$$

4. h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. On utilise la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
\partial_1 h(x,y) &= \Big(-\frac{1}{x^2}(1+x) + \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big).1\Big)(1+y) \\
&= \Big(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)(1+y) \\
&= \Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\Big)(1+y).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\partial_2 h(x,y) &= (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}(1+y) + \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big).1\Big) \\
&= (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\Big).
\end{aligned}$$

5. Soit $(x,y) \in U$. (x,y) est un point critique de h si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \partial_1 h(x,y) = 0 \\ \partial_2 h(x,y) = 0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y}\right)(1+y) = 0 \\ (1+x)\left(-\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} = 0, \\ -\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x} = 0, \end{cases} \qquad (\text{car } 1+y \neq 0 \text{ et } 1+x \neq 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

6. On a
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-y^3) = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \underset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y^3 = 1 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$
Ainsi, h admet pour unique point critique le point $(1,1)$.

7. (a) Pour tout $(x,y) \in U$,
$$\begin{aligned}
h(x,y) &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x+y+xy) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + x \\
&= 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}$$

(b) On a $h(1,1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$, donc d'après l'identité de la question précédente, pour tout $(x,y) \in U$,
$$h(x,y) - h(1,1) = f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) - 6\,.$$
Or on a montré dans la Partie A que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Ainsi f admet un minimum global en 1, c'est-à-dire que pour tout $t > 0$, $f(t) \geq f(1) = 2$. On a donc :
$$h(x,y) - h(1,1) \geq 2 + 2 + 2 - 6 = 0.$$
Finalement, pour tout $(x,y) \in U$, $h(x,y) \geq h(1,1)$ et h admet un minimum global sur U en $(1,1)$.

8. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Ini. $u_1 = 1 \geq 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$, donc u_n est non-nul et donc $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n}$ est bien défini.
Toujours par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$.
Finalement, la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

9. Voici la fonction demandée :

```python
def suite(n):
    u  = 1
    for k in range(2, n+1):
        u = u + 1/((k-1)**2*u)
    return(u)
```

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ car $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, $u_n \geq 1$ d'après la question 8, donc $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Finalement, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$).

Par comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

(c) Soit $n \geq 2$. Par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 = u_n - 1.$$

On a ainsi $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n$ converge (question précédente) donc la suite de ses sommes partielles converge, et par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.

11. (a) Soit $k \geq 2$ un entier.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, donc pour tout $t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{t^2} \geq \dfrac{1}{k^2}$.

En intégrant pour t allant de $k-1$ à k (bornes croissantes),

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}.$$

(b) Soient n et p des entiers tels que $2 \leq p < n$. Par télescopage :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_p.$$

D'autre part, en combinant les inégalités des questions 10.(a) et 11.(a), on a pour tout $k \geq 2$,

$$0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt\,.$$

En sommant ces encadrements pour $k \in [\![p, n-1]\!]$:

$$0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt,$$

et donc

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt,$$

où l'on a utilisé la relation de Chasles dans le membre de droite de l'encadrement.

(c) En particulier pour $p = 2$ et $n \geq 3$, l'encadrement précédent donne :

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1\,,$$

et donc
$$u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2.$$
Par définition, on a $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1.u_1} = 2$. Donc $u_n \in [2, 3]$ pour tout $n \geq 3$.
Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\ell \in [2, 3]$.

(d) Soit $p \geq 2$ fixé et $n > p$ un entier. On reprend l'encadrement de la question 11.(b) :
$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$
Or
$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \Big[-\frac{1}{t} \Big]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{p-1}.$$
Ainsi
$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$
Finalement en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient
$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

(e) Si on choisit p tel que $\dfrac{1}{p-1} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $p \geq 10001$, alors d'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leq \ell - u_p \leq 10^{-4}$ et u_p constitue une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.
Ainsi la fonction suivante convient :

```
def approx():
    u = suite(10001)
    return(u)
```

Variante sans calculer explicitement le rang p à partir duquel u_p constitue une bonne approximation de ℓ :

```
def u = approx()
    u = 2
    p = 2
    while 1/(p-1) >= 0.0001 :
        u = u + 1/(p^2*u)
        p = p+1
    return(u)
```

Exercice 3 (EML 2019)

1. (a) F_U est une fonction de répartition donc pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 \leq F_U(t) \leq 1$.
Par ailleurs f_V est une densité donc pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f_V(t) \geq 0$. Ainsi par produit,
$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq F_U(t) f_v(t) \leq f_V(t).$$

(b) La fonction $F_U f_v$ est continue sur $[0, +\infty[$ (comme produit de F_U fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, et de f_V continue sur $[0, +\infty[$ par hypothèse), à valeurs positive sur $[0, +\infty[$ d'après la question précédente. Enfin, d'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$, $F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t) dt$ converge car f_V est une densité. Ainsi par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge.

2. La fonction f_V est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)dt$ converge et vaut 1. Par ailleurs, f_V est nulle sur $]-\infty,0[$ par hypothèse donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_V(t)dt = 0$. Ainsi $1 = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_V(t)dt$.
   En utilisant cette information on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} P(U>V) &= 1-P(U\leq V) = 1-\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(f_V(t)-F_U(t)f_V(t)\big)\,dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\big(1-F_U(t)\big)\,dt. \end{aligned}$$

3. (a) D'après le cours, pour tout $t\in[0,+\infty[$,
$$F_U(t) = 1-e^{-\lambda t} \qquad \text{et} \qquad f_V(t) = \mu e^{-\mu t}.$$
   (b) D'après la question 2 :
$$\begin{aligned} P(U>V) &= \int_0^{+\infty} \big(1-F_U(t)\big)f_V(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mu e^{-\mu t}\,dt \\ &= \mu\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \mu\Big[-\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\Big]_0^A \\ &= \lim_{A\to+\infty}\mu\Big(-\frac{e^{-(\lambda+\mu)A}}{\lambda+\mu}+\frac{1}{\lambda+\mu}\Big) \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \end{aligned}$$
   car $\lambda+\mu>0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-(\lambda+\mu)A} = 0$.

4. (a) Soit $t\in[0,+\infty[$. On a $[M_n>t] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}[T_i>t]$, donc par indépendance de $T_1,\dots,T_n$, puis en utilisant le fait que $T_1,\dots,T_n$ suivent la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$,
$$\begin{aligned} P(M_n>t) &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i>t) = \prod_{i=1}^{n}\big(1-F_{T_i}(t)\big) = \big(1-F_{T_1}(t)\big)^n \\ &= (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t}. \end{aligned}$$
   (b) D'après la question précédente, pour tout $t\geq 0$,
$$F_{M_n(t)} = 1-P(M_n>t) = 1-e^{-n\lambda t}.$$
   Par ailleurs pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $T_i(\Omega)=\mathbb{R}_+$ donc $M_n(\Omega)=\mathbb{R}_+$, par conséquent pour tout $t<0$, $F_{M_n}(t)=0$. Finalement, on a montré que :
$$\forall t\in\mathbb{R},\quad F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0\,, \\ 1-e^{-n\lambda t} & \text{si} \quad t\geq 0\,. \end{cases}$$
   On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, donc $M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

5. (a) $[N=1]=[T_1\leq T_0]$ par définition de N.
   D'après le résultat admis à la Partie A, puisque T_0 et T_1 sont à densité et admettent une densité nulle sur $]-\infty,0[$,
$$\begin{aligned} P(N=1) &= P(T_1\leq T_0) = \int_0^{+\infty} F_{T_1}(t)f_{T_0}(t)\,dt = \int_0^{+\infty}(1-e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \lambda\int_0^{+\infty}(e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t})dt = \lambda\lim_{A\to+\infty}\Big[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\Big]_0^A \\ &= \lambda\Big(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}\Big) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

car $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda t} = \lim\limits_{A\to+\infty} e^{-2\lambda t} = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[N > n]\cup[N = 0]$ est l'événement "le plus petit indice $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$, s'il existe, est strictement supérieur à n", c'est-à-dire "pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i > T_0$", c'est-à-dire $[M_n > T_0]$. On a donc $[N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]$.
Les variables aléatoires M_n et T_0 étant à densité et admettant une densité nulle sur $]-\infty, 0[$, on peut appliquer le résultat de la question 2 :

$$\begin{aligned} P([N > n] \cup [N = 0]) &= P(M_n > T_0) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_{M_n}(t)\big) f_{T_0}(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-n\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(n+1)\lambda t}dt = \lim_{A\to+\infty} \Big[-\frac{e^{-(n+1)\lambda t}}{n+1}\Big]_0^A = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

car $(n + 1)\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-(n+1)\lambda A} = 0$.

(c) Soit $n \geq 2$ un entier. On a $[N = n] = \big([N > n - 1] \cup [N = 0]\big) \setminus \big([N > n] \cup [N = 0]\big)$ donc $P(N = n) = P([N > n - 1] \cup [N = 0]) - P([N > n] \cup [N = 0])$, par conséquent d'après la question précédente (on a bien $n - 1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$P(N = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(d) On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$ donc on sait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(N = n) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) = 1 - P(N = 1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(N = n) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big). \end{aligned}$$

Or pour tout entier $M \geq 2$, à l'aide d'un changement d'indice puis en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{M}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) &= \sum_{n=2}^{M}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{M}\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{M}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{M+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{M+1} \\ &\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et donc $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{2}$.
Finalement, $P(N = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

6. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq0} nP(N = n)$ converge absolument, si et seulement si $\sum\limits_{n\geq2} n\frac{1}{n(n+1)}$ converge absolument, or pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \geq 0$ et $\frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et la série $\sum\limits_{n\geq2} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geq2} \frac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi N n'admet pas d'espérance.