Révisions 8

Correction du sujet EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2009)

1. Pour tout polynôme P de E, on a $deg(P) \leq 2$ donc $deg(P') \leq 1$ et $deg(P'') \leq 0$. On en déduit que $deg(f(P)) \leq 2$, et $f(P) \in E$ donc f est une application de E dans E.

   D'autre part, on a pour tous P et Q de E et tout λ réel :

   $$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)''-5(\lambda P+Q)'+6(\lambda P+Q) = \lambda P''+Q''-5\lambda P'-5Q'+6\lambda P+6Q \\ &= \lambda(P''-5P'+6P)+(Q''-5Q'+6Q) = \lambda f(P)+f(Q) \end{aligned}$$

   et f est linéaire. Donc f est un endomorphisme de E.

2. Pour tout x réel, on a :

   $f(e_0)(x) = 0-5\times 0+6 = 6 = 6e_0(x)$ donc $f(e_0) = 6e_0$.

   $f(e_1)(x) = 0-5+6x = (6e_1-5e_0)(x)$ donc $f(e_1) = -5e_0+6e_1$.

   $f(e_2)(x) = 2-5\times(2x)+6x^2 = (6e_2-10e_1+2e_0)(x)$ donc $f(e_2) = 2e_0-10e_1+6e_2$.

   Enfin on obtient :

   $$A = M_{(e_0,e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. A est inversible car elle triangulaire sans 0 sur la diagonale donc f est un isomorphisme. On a vu que c'est un endomorphisme de E donc c'est bien un automorphisme de E.

   On en déduit que f est injective, donc $ker(f) = \{0\}$.

4. A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. On en déduit que $Sp(A) = \{6\}$.

   Si A est diagonalisable, alors il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Comme $Sp(A) = \{6\}$, $D = 6I_3$ et $A = P\times 6I_3\times P^{-1} = 6I_3$ ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

5. Pour toute fonction u de classe C^∞, u' et u'' le sont aussi donc $g(u) = u''-5u'+6u$ est de classe C^∞ et g est bien une fonction de F dans F.

   De plus pour tous u, v de F et tout réel λ,

   $$\begin{aligned} g(\lambda u+v) &= (\lambda u+v)''-5(\lambda u+v)'+6(\lambda u+v) = \lambda u''+v''-5\lambda u'-5v'+6\lambda u+6v \\ &= \lambda(u''-5u'+6u)+(v''-5v'+6v) = \lambda g(u)+g(v) \end{aligned}$$

   donc g est linéaire. Donc g est un endomorphisme de F.

6. (a) Il y a deux méthodes ici : soit par changement de variable en posant $v = u'$ soit en étudiant l'équation caractéristique. Faisons la première méthode ici et on fera la deuxième à la question suivante.

   En posant $v = u'$, on a :

   $$u''-5u' = 0 \Leftrightarrow v'-5v = 0 \Leftrightarrow v(x) = \lambda e^{5x} \Leftrightarrow u'(x) = \lambda e^{5x} \Leftrightarrow u(x) = \frac{\lambda}{5}e^{5x}+\mu,$$

   où λ et μ sont des constantes réels. Donc les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$ sont :

   $$S_1 = \left\{x \mapsto \lambda e^{5x}+\mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

   On peut supprimer le 5 au dénominateur en posant $\lambda' = \dfrac{\lambda}{5}$.

(b) On a donc :

$$\begin{array}{rcl} Ker(g-6Id) & = & \{u \in F \mid (g-6Id)(u)=0\} \\ & = & \{u \in F \mid g(u)-6u=0\} \\ & = & \left\{u \in F \mid u''-5u'=0\right\} \\ & = & \left\{x \mapsto \lambda e^{5x}+\mu \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & Vect(u_1,u_2) \end{array}$$

avec u_1 la fonction constante égale à 1 et $u_2(x) = e^{5x}$. La famille (u_1, u_2) est donc génératrice de $Ker(g-5Id)$. Elle est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires. Donc c'est une base de $Ker(g-5Id)$.

7. (a) On résout l'équation caractéristique associée à $(\mathscr{E}_2)$:

$$r^2-5r+6=0 \Leftrightarrow (r-3)(r-2)=0 \Leftrightarrow r=2 \text{ ou } r=3.$$

Donc les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$ sont :

$$S_2 = \left\{x \mapsto \lambda e^{2x}+\mu e^{3x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) On a donc :

$$\begin{array}{rcl} Ker(g) & = & \{u \in F \mid g(u)=0\} \\ & = & \left\{u \in F \mid u''-5u'+6u=0\right\} \\ & = & \left\{x \mapsto \lambda e^{2x}+\mu e^{3x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & Vect(u_3,u_4) \end{array}$$

avec $u_3(x) = e^{2x}$ et $u_4(x) = e^{3x}$. La famille (u_3, u_4) est donc génératrice de $Ker(g)$. Elle est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires. Donc c'est une base de $Ker(g)$.

Exercice 2 (EDHEC 2003)

1. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	$\Vert$	$+$	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x-1}{x} > 0$.

2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$ et $\dfrac{e^x-1}{x} > 0$ comme composée de fonctions continues.

En 0 : $e^x-1 \sim x$ donc $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ et $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \to 0$ (par continuité de ln en 1). Donc $f(x) \to f(0)$ et f est continue en 0.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)}.$$

4. On utilise le développement limité de exp en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(x-1)+1}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{x+x^2-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+1}{x(e^x-1)} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(e^x-1)} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x \times x} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. (a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x$ d'où ses variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

(b) Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$ avec $g(x) > 0$ et $x(e^x-1) > 0$. On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les limites :

- En $+\infty$: $\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x\left[1-e^{-x}\right]}{x} \to +\infty$ par croissances comparées.
- En $-\infty$: $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \to -\infty$.

6. Par récurrence :

Ini. $u_0 > 0$.

Héré. Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n > 0$.
Par stricte croissance de f, $f(u_n) > f(0)$ donc $u_{n+1} > 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Ccl. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

7. (a) Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = f(-x) \end{aligned}$$

   (b) Si $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le tableau de variation de f.
   Donc avec l'égalité de la question précédente, $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a en prenant $x = u_n$ dans l'inégalité de la question précédente : $f(u_n) - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.

8. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en ℓ et donc $f(\ell) = \ell$.
   Comme $f(x) - x = f(-x)$ et ne s'annule qu'en 0, on a donc $\ell = 0$.
   Donc la suite (u_n) converge vers 0 en $+\infty$.

9. Voici le programme `Python` demandé :

```python
u = 1
n = 0
while u > 10**(-3):
    u = np.log((np.exp(u)-1)/u)
    n = n+1
print(n)
```

Exercice 3 (EDHEC 2011)

1. (a) $(X_i = 1)$ signifie que l'urne i contient encore ses n boules après les n tirages, donc qu'elle n'a jamais été choisie. On a donc par indépendance :

$$P(X_i = 1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U_{i,k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

   (b) $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ signifie qu'aucune des deux urnes i et j n'ont été choisies. A chaque tirage, la probabilité en est de $\dfrac{n-2}{n}$ (urnes équiprobables) donc, pour tout $i \neq j$, on a :

$$P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

   (c) $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2 = -\dfrac{1}{n^2}$ donc $1 - \dfrac{2}{n} \neq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n \neq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$. On a ainsi :

$$P(X_i = 1) P(X_j = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \neq \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)).$$

   Ainsi, si i et j sont deux entiers naturels distincts, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. (a) X_i est une variable de Bernoulli donc $E(X_i) = P(X_i = 1)$ donc

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

(b) On a alors :

$$\frac{1}{n}E(Y_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{1}{n} = -1 \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -1$.

Par composition avec exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{n}E(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} e^{-1}$.

Finalement, $\frac{E(Y_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$ et donc $E(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Y_n compte le nombre d'urne restant intactes. Donc, en moyenne, le tiers ($e \simeq 3$) environ des urnes reste intactes.

3. (a) N_i est le nombre de fois où l'urne i a été choisie en n épreuves indépendantes, la probabilité à chacune étant de $\frac{1}{n}$ donc $N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$ donc $E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

(b) X_i vaut 0 si l'urne i a été choisie au moins une fois et N_i vaut 0 si elle n'a jamais été choisie. Donc $N_iX_i = 0$.

(c) Les variables N_i et X_i ne sont pas indépendantes, car $E(N_iX_i) = 0 \neq E(N_i)E(X_i)$.

4. Voici le programme demandé :

```python
n = int(input('Donner un entier n superieur ou egal a 2'))
x1 = 1
n1 = 0
for k in range(n):
  hasard = np.floor(np.random()*n) + 1
  if hasard == 1:
    x1 = 0 #on a choisi au moins une fois l urne 1
    n1 = n1+1 #on compte une boule manquante de plus
print(x1, n1)
```

Exercice 4 (EDHEC 2014)

1. (a) Posons $f(t) = \max(x,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < x \\ t & \text{si } t \geq x \end{cases}$.

On en déduit que f est continue sur $]-\infty; x[$ et sur $]x; +\infty[$. De plus, $x \underset{t\to x^-}{\longrightarrow} x$ et $t \underset{t\to x^+}{\longrightarrow} x$, c'est-à-dire $f(t) \underset{t\to x^-}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(t) \underset{t\to x^+}{\longrightarrow} f(x)$. Ce qui prouve que f est également continue en x.

La fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On envisage les 3 cas :

- Si $x \leq 0$, alors pour tout $t \in [0;1]$, on a $t \geq x$, et donc $\max(x,t) = t$. D'où

$$y = \int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- Si $x \in]0;1]$, on découpe l'intégrale en deux, suivant que $t \leq x$ ou $t > x$:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^x \max(x,t)dt + \int_x^1 \max(x,t)dt = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt \\ &= \Big[xt\Big]_0^x + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2+1}{2}. \end{aligned}$$

- Si $x > 1$, alors pour tout $t \in [0;1]$, on a $t < x$, et donc $\max(x,t) = x$. D'où

$$y = \int_0^1 \max(x,t)dt = \int_0^1 x\,dt = \Big[xt\Big]_0^1 = x$$

Ainsi, $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

2. La variable aléatoire X suit une loi géométrique, donc, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geq 1$. Il y a donc deux cas :

   - Si $X(\omega) = 1$, alors, d'après la question précédente, $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} = \dfrac{1^2+1}{2} = 1$, et donc $Y(\omega) = X(\omega)$.
   - Si $X(\omega) > 1$, alors, d'après la question précédente, $Y(\omega) = X(\omega)$.

   Donc, dans tous les cas, on a bien $Y(\omega) = X(\omega)$.

   Ainsi, si X suit une loi géométrique, alors $Y = X$.

3. (a) Comme $X(\omega) = \{-1;0;1\}$, on a $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1) = 1$. Par conséquent :

$$P(X=0) = 1 - P(X=-1) - P(X=1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

   (b) On envisage les 3 cas. Pour tout $\omega \in \Omega$:

   - Si $X(\omega) = -1$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$.
   - Si $X(\omega) = 0$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$ également.
   - Si $X(\omega) = 1$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} = \dfrac{1^2+1}{2} = 1$.

   Donc, dans tous les cas, on a $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$ ou $Y(\omega) = 1$.

   Par conséquent, on a bien $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{2};1\right\}$.

   De plus, d'après les 3 cas ci-dessus :

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X=-1) + P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

   Et

$$P(Y=1) = P(X=1) = \frac{1}{4}.$$

   La loi de Y est donc :

y	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y=y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

   (c) Le programme complété est le suivant :

```python
def SimulY():
    if rd.random() < 1/4:
        y = 1
    else:
        y = 1/2
    return(y)
```

4. (a) La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0;1[$. Donc, pour tout $\omega \in \Omega$, il y a deux cas :

   - Si $X(\omega) = 0$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$, et donc $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$.
   - Si $X(\omega) \in]0;1[$, alors, d'après la question 1.(b), $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$.

   Donc, dans tous les cas, on a bien $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$.

   Ainsi, si X suit une loi uniforme sur $[0;1[$, alors $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

   (b) La variable aléatoire X est à valeurs dans $[0;1[$, donc X^2 est à valeurs dans $[0;1[$ également. Par conséquent, X^2+1 est à valeurs dans $[1;2[$ et donc Y est à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$.

   Autrement dit : $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2};1\right[$.

   (c) Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2+1}{2} \leq x\right) = P\left(X^2+1 \leq 2x\right) = P\left(X^2 \leq 2x-1\right) \\
&= P\left(|X| \leq \sqrt{2x-1}\right) \quad (\text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissance sur } \mathbb{R}_+) \\
&= P\left(X \leq \sqrt{2x-1}\right) \quad (\text{car } X \text{ est à valeurs positives}) \\
&= F_X(\sqrt{2x-1}) \\
&= \sqrt{2x-1} \quad (\text{car } \sqrt{2x-1} \in [0,1[\text{ et } X \text{ suit une loi uniforme sur } [0;1[)
\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right[$, on a $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

   (d) D'après les deux questions précédentes, la fonction de répartition de Y est la fonction :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x-1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2};1\right[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   Cette fonction est continue sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et sur $]1;+\infty[$ (soit comme fonction constante, soit par opérations sur les fonctions continues).
   De plus, elle est également continue en $\frac{1}{2}$ (car $F_Y(x) \underset{x\to 1/2^-}{\longrightarrow} F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F_Y(x) \underset{x\to (1/2)^+}{\longrightarrow} F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$) et en 1 (car $F_Y(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} F_Y(1)$ et $F_Y(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} F_Y(1)$).
   Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
   De plus, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et sur $]1;+\infty[$ (soit comme fonction constante, soit par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
   Par conséquent, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2};1\right\}$ (qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points).

On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité.

De plus (ce n'est pas demandé dans l'énoncé), avec l'expression de F_Y, on obtient (en dérivant là où elle est dérivable et en donnant des valeurs arbitraires positives ailleurs) une densité de Y (qu'on appellera f_Y) :

$$f_Y : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2};1\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(e) Une méthode pour déterminer $E(Y)$ consisterait à calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)dx$ (avec f_Y la fonction ci-dessus). Mais il y a plus simple. On sait (d'après la question 4.(a)) que $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$ avec X qui suit une loi uniforme sur $[0;1[$ (de densité constante égale à 1 sur $[0;1]$, et nulle ailleurs). Donc, d'après le théorème du transfert, on a, sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale :

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{x^2+1}{2} \times 1dx$$

Or, cette intégrale est bien absolument convergente (intégrale d'une fonction continue sur un segment). Donc Y admet une espérance. De plus :

$$E(Y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

(f) D'après la question 4.(a), le programme complété est le suivant :

```python
def SimulY():
    x = rd.random()
    y = (1+x**2)/2
    return(y)
```

5. (a) Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a immédiatement $g\left(]-\infty;0]\right) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et $g\left(]1;+\infty]\right) =]1;+\infty]$. De plus, sur $]0;1]$, la fonction g est continue (fonction polynomiale) et est strictement croissante (g est dérivable sur $]0;1[$, de dérivée $g' : x \mapsto x$, qui est strictement positive sur $]0;1[$). Donc g réalise une bijection de $]0;1]$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} g(x); g(1)\right]$. On en déduit que $g\left(]0;1]\right) = \left]\dfrac{1}{2};1\right]$.
Par conséquent, en "recollant les morceaux" :

$$g(\mathbb{R}) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left]\frac{1}{2};1\right] \cup]1;+\infty] = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Or, $Y = g(X)$. Donc $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$, c'est-à-dire $Y(\Omega) = g(\mathbb{R}) = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

(b) En reprenant les calculs ci-dessus qu'on a l'équivalence : $g(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq 0$.

En effet, si $x \leq 0$, on a bien $g(x) = \dfrac{1}{2}$, et si $x > 0$ (que x soit dans $]0;1]$ ou dans $]1;+\infty]$), on a $g(x) > \dfrac{1}{2}$ et donc $g(x) \neq \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

(c) Étant donné que $Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, on a immédiatement $P\left(Y < \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $P(Y \leq x) = 0$ pour tout $x < \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < \dfrac{1}{2}$.

Supposons maintenant que $x \geq \dfrac{1}{2}$. On calcule $F_Y(x)$ en appliquant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$. On obtient :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\Big((X \leq 0) \cap (Y \leq x)\Big) + P\Big((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\ &\quad + P\Big((X > 1) \cap (Y \leq x)\Big) \end{aligned}$$

On simplifie cela en envisageant deux cas :

- Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ (car $(X \leq 0)$ implique $(Y = \frac{1}{2})$ et donc forcément $(Y \leq x)$) et $(X > 1) \cap (Y \leq x) = \emptyset$ (car $(X > 1)$ implique $(Y > 1)$, ce qui est incompatible avec $(Y \leq x)$). D'où :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X \leq 0) + P\Big((0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\ &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap \left(\frac{X^2+1}{2} \leq x\right)\right) \quad \text{(question 1.b)} \\ &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap (X^2 \leq 2x - 1)\right) \\ &= P(X \leq 0) + P\left((0 < X \leq 1) \cap \left(-\sqrt{2x-1} \leq X \leq \sqrt{2x-1}\right)\right) \\ &= P(X \leq 0) + P\left(0 < X \leq \sqrt{2x-1}\right) \quad \text{car } \sqrt{2x-1} \leq 1 \\ &= P\left(X \leq \sqrt{2x-1}\right) \end{aligned}$$

  Autrement dit, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $F_Y(x) = \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right)$.
- Si $x > 1$, alors $(X \leq 0) \cap (Y \leq x) = (X \leq 0)$ (de même qu'au cas précédent) et $(0 < X \leq 1) \cap (Y \leq x) = (0 < X \leq 1)$ (car $(0 < X \leq 1)$ implique $\left(\frac{1}{2} < Y \leq 1\right)$ et donc forcément $(Y \leq x)$). D'où :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X \leq 0) + P(0 < X \leq 1) + P\Big((X > 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\ &= P(X \leq 1) + P\Big((X > 1) \cap (Y \leq x)\Big) \\ &= P(X \leq 1) + P\Big((X > 1) \cap (X \leq x)\Big) \quad \text{(question 1.b)} \\ &= P(X \leq 1) + P\Big(1 < X \leq x\Big) \\ &= P(X \leq x) \end{aligned}$$

  Autrement dit, si $x > 1$, alors $F_Y(x) = \Phi(x)$.

Ainsi, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

(d) On constate que $F_Y(x) \underset{x \to (1/2)^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ (car Φ est continue et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$).

Et $F_Y(x) \underset{x \to (1/2)^-}{\longrightarrow} 0$.

Donc F_Y n'est pas continue en $\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que Y n'est pas une variable aléatoire à densité.

Autre méthode : Si Y était à densité, on aurait $P(Y = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui contredit la réponse à la question 5.(b). Donc Y n'est pas une variable à densité.

De plus, si Y était une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition serait une fonction en escaliers et serait constante sur tout intervalle où elle est continue. Or, F_Y est continue sur $]1; +\infty[$ (car Φ l'est), mais n'y est pas constante (elle y est strictement croissante car, pour tout $x > 1$, on a $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, qui est strictement positif).

On en déduit que Y n'est pas non plus une variable aléatoire discrète.