Révisions 9

Correction du sujet ESSEC

Sujet HEC 2005 E2

1. Méthode 1 (par récurrence) :

   Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$: "pour tout entier $r \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$".

   Ini. Si $n=1$, $r=1$ et on a : $\sum_{k=1}^{1} \binom{1-1}{1-1} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1}$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Pour tout $r \in [\![1,n+1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k-1}{r-1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} + \binom{n}{r-1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}.$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.

   Méthode 2 (par télescopage) :

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} = \binom{r-1}{r-1} + \sum_{k=r+1}^{n} \binom{k-1}{r-1} = 1 + \sum_{k=r+1}^{n} \left(\binom{k}{r} - \binom{k-1}{r}\right) = 1 + \binom{n}{r} - \binom{r}{r} = \binom{n}{r}.$$

2. (a) Pour tout réel $x \in]0;1[$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-x)f_{r,n}(x) &= (1-x)\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k \\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k - \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k - \sum_{h=r+1}^{n+1} \binom{h-1}{r} x^k \\
&= \binom{r}{r} x^r + \sum_{k=r+1}^{n} \left[\binom{k}{r} - \binom{k-1}{r}\right] x^k - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= x^r + \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} x^k - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= x x^{r-1} + \sum_{h=r}^{n-1} \binom{h}{r-1} x^{h+1} - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= x \sum_{h=r-1}^{n-1} \binom{h}{r-1} x^h - \binom{n}{r} x^{n+1} \\
&= x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}
\end{aligned}$$

(b) On suppose l'entier r fixé. On a :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n^r\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{r!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.$$

3. (a) Pour $r=0$, on a :

$$f_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}x^k = \sum_{k=0}^{n}x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$$

car c'est la somme partielle d'une série géométrique convergente (car $|x|<1$).

Pour $r=1$, on a :

$$f_{1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}x^k = x\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{(1-x)^2}$$

car c'est la somme partielle d'une série géométrique dérivée convergente (car $|x|<1$).

(b) Avec la question 2.(a), on a :

$$f_{r,n}(x) = \frac{1}{1-x}\left(xf_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r}x^{n+1}\right) = \frac{x}{1-x}f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r}\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Comme $\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}$ (question 2.(b)), $\binom{n}{r}\frac{x^{n+1}}{1-x} \sim \frac{x}{r!}\times n^r x^n = \frac{x}{r!}\times n^r e^{n\ln(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (car $x\in]0,1[$).

Donc, par passage à la limite dans l'égalité précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

(c) On a démontré que la propriété "$\sum\limits_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^k = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$" est vraie au rang $r=0$ (et au rang $r=1$) d'après la question 3.(a) et qu'elle est héréditaire d'après la question 3.(b). Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $r\in\mathbb{N}$.

4. On a $\sum\limits_{k=1}^{n}t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$ pour tout $t\in[0,1[$. En intégrant de 0 à x (et par linéarité de la somme) :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}t^{k-1}\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^x t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}.$$

5. Pour tout $t\in[0,x]$, on a par construction :

$$0 \le \frac{t^n}{1-t} \le \frac{t^n}{1-x}.$$

En intégrant pour t allant de 0 à x (bornes croissantes), on a :

$$0 \le \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \le \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$

Par encadrement ($x\in]0,1[$), on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.

6. Avec la question précédente, on a :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x).$$

Donc, avec la question 4, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x).$$

Finalement, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$.

7. On a $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ (le sujet demande de redémontrer ses formules !).

8. (a) La loi de Y est donnée par :

$$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X = k) = pq^{k-1}.$$

(b) Y admet une espérance si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} P\left(Y = \frac{1}{k}\right)$ converge absolument (ce qui est équivalent à la convergence car c'est une série à termes positifs).

$$\frac{1}{k} P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} pq^{k-1} = \frac{p}{q} \times \frac{q^k}{k}.$$

D'après la question 6, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{q^k}{k}$ converge car $q \in]0,1[$. Donc Y a une espérance et on a :

$$E(Y) = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\frac{p}{q} \ln(1-q).$$

(c) De même, par le théorème de transfert, Y^i admet une espérance si la série $\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k}\right)^i P\left(Y = \frac{1}{k}\right)$ converge absolument (ce qui est équivalent à la convergence car c'est une série à termes positifs). Or :

$$0 \leq \left(\frac{1}{k}\right)^i P\left(Y = \frac{1}{k}\right) \leq \left(\frac{1}{k}\right) P\left(Y = \frac{1}{k}\right),$$

et on a montré à la question précédente que la série $\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k}\right) P\left(Y = \frac{1}{k}\right)$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k}\right)^i P\left(Y = \frac{1}{k}\right)$ converge et $E(Y^i)$ existe donc pour tout $i \geq 1$.

9. (a) On a $S_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_2 = n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} ((X_1 = k) \cap (S_2 = n))\right) \quad \text{(avec le SCE } (X_1 = k)_{k\geq 1}\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = n-k) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k) P(X_2 = n-k) \quad \text{(car } X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1} \times pq^{n-k-1} = (n-1)p^2 q^{n-2}.
\end{aligned}$$

Et $Y_2(\Omega) = \left\{ \dfrac{2}{n} \mid n \geq 2 \right\}$ et $P\left(Y_2 = \dfrac{2}{n}\right) = P(S_2 = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

(b) Y_2 admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n} P\left(Y_2 = \frac{2}{n}\right)$ converge absolument (ce qui est équivalent à la convergence car c'est une série à termes positifs).

$$\frac{2}{n} P\left(Y_2 = \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}(n-1)p^2q^{n-2} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)p^2q^{n-2} \sim \frac{2p^2}{q^2}q^n.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} q^n$ est une série géométrique convergente (car $q \in]0,1[$), par comparaison de séries à termes générales positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n} P\left(Y_2 = \frac{2}{n}\right)$ converge et Y_2 admet une espérance.

(c) On transforme alors la somme partielle (pour $N \geq 2$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n} P\left(Y_2 = \frac{2}{n}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n}(n-1)p^2q^{n-2} = \sum_{n=2}^{N} 2p^2q^{n-2} - \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n}p^2q^{n-2} \\
&= 2p^2 \sum_{n=0}^{N-2} q^n - \frac{2p^2}{q^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{q^n}{n} + 2\frac{p^2}{q} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 2p^2\left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q^2}\ln(1-q) + \frac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

Donc $E(Y_2) = 2p^2\left(\dfrac{1}{1-q} + \dfrac{1}{q^2}\ln(1-q) + \dfrac{1}{q}\right)$.

10. (a) Comme les X_k ont une espérance, S_n admet une espérance et on a (par linéarité de l'espérance) :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} = \frac{n}{p}.$$

Comme les X_i ont une variance, S_n admet une variance et on a (par indépendance des X_k) :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q}{p^2} = \frac{nq}{p^2}.$$

(b) Démontrons ce résultat par récurrence sur n.

Ini. $S_1 = X_1$ qui suit une loi géométrique de paramètre p. Donc :
- Si $s < 1$, $P(S_1 = s) = P(X_1 = s) = 0$ car $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Si $s \geq 1$, $P(S_1 = s) = P(X_1 = s) = pq^{s-1} = \binom{s-1}{1-1}p^1q^{s-1}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et que S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions. On a :
- Si $s < n+1$, $P(S_{n+1} = s) = 0$ car $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ (par hypothèse de récurrence) et $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $S_{n+1}(\Omega) = [\![n+1, +\infty[\![$.

– Si $s \geq n+1$, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1}=s) &= P(S_n+X_{n+1}=s)\\
&= P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}(S_n=k)\cap(S_n+X_{n+1}=s)\right) \quad \text{(avec le SCE } (S_n=k)_{k\geq n}\text{)}\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} P\left((S_n=k)\cap(X_{n+1}=s-k)\right) \quad \text{(par incompatibilité)}\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n=k)\,P(X_{n+1}=s-k) \quad \text{(par indépendance)}\\
&= \sum_{k=n}^{s-1} P(S_n=k)\,P(X_{n+1}=s-k) \quad \text{(car } X_{n+1}(\Omega)=\mathbb{N}^*\text{)}\\
&= \sum_{k=n}^{s-1} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} p q^{s-k-1} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= p^{n+1}q^{s-n-1}\sum_{k=n}^{s-1}\binom{k-1}{n-1}\\
&= p^{n+1}q^{s-(n+1)}\binom{s-1}{n} \quad \text{(question 1).}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.

Ccl. Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11. (a) On a $Y_n(\Omega) = \left\{\frac{n}{s} \mid s \geq n \text{ et } s \text{ entier}\right\}$ et $P\left(Y_n = \frac{n}{s}\right) = P(S_n = s) = \binom{s-1}{n-1}p^n q^{s-n}$

(b) Soit t un réel quelconque de $]0,1[$ (si $t=0$, la série est de terme général nul donc convergente) et $m \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\frac{s^m t^s}{1/s^2} = s^{m+2}e^{s\ln(t)} \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car par croissance comparée (car $t \in]0,1[$). Donc $s^m t^s = o\left(\frac{1}{s^2}\right)$ quand $s \to +\infty$.

De plus, la série de Riemann de paramètre $2>1$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\left(\sum_{s\geq 1} s^m t^s\right)$, est convergente.

On a :

$$\frac{n}{s}P\left(Y_n=\frac{n}{s}\right) = \frac{n}{s}\binom{s-1}{n-1}p^n q^{s-n} \sim \frac{n}{s}\frac{(s-1)^{n-1}}{(n-1)!}p^n q^{s-n} \sim \frac{n}{(n-1)!}\frac{p^n}{q^n}s^{n-2}q^s$$

avec $\frac{n}{(n-1)!}p^n q^{-n}$ constante par rapport à s et la série de terme général $s^{n-2}q^s$ convergente (en prenant $m=n-2$ et $t=q$).

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme $\sum_{s\geq n}\frac{n}{s}P\left(Y_n=\frac{n}{s}\right)$ est absolument convergente et Y_n a une espérance.

De même,

$$\left(\frac{n}{s}\right)^2 \mathrm{P}\left(Y_n=\frac{n}{s}\right) \sim \frac{n^2}{(n-1)!}\frac{p^n}{q^n}s^{n-3}q^s$$

donnera l'existence de l'espérance de Y_n^2 et donc du moment d'ordre 2 de Y_n.

Remarque. Sans suivre la question intermédiaire de l'énoncé, on pouvait faire un raisonnement plus simple : pour tout $s \geq n$,

$$\frac{n}{s} P\left(Y_n = \frac{n}{s}\right) \leq P\left(Y_n = \frac{n}{s}\right)$$

et la série $\sum_{s \geq n} P\left(Y_n = \frac{n}{s}\right)$ est convergente. Donc par comparaison de séries à termes positifs, Y_n admet une espérance. On ferait de même pour le moment d'ordre 2.

12. Avec la question 10.(a),

$$E\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n} E\left(S_n\right) = \frac{1}{p}$$

donc $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre $\frac{1}{p}$.

Toujours avec la question 10.(a),

$$r(\overline{X}_n) = (b(\overline{X}_n))^2 + V\left(\overline{X_n}\right) = V\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(S_n\right) = \frac{q}{np^2}.$$

13. (a) On sait déjà que Y_n a une espérance (question 11.(b)). De plus,

$$E\left(Y_n\right) = \sum_{s=n}^{+\infty} \frac{n}{s} P\left(Y_n = \frac{n}{s}\right) = \sum_{s=n}^{+\infty} \frac{n}{s} \binom{s-1}{n-1} p^n q^{s-n} = n\left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{s=n}^{+\infty} \frac{1}{s} \binom{s-1}{n-1} q^s = n\left(\frac{p}{q}\right)^n h_n(q).$$

h_n' est continue sur $[0,q]$ (car on a admis que h_n est C^1 sur $[0,1[$). Donc $h_n\left(q\right) = \int_0^q h_n'\left(t\right) dt$.

Et comme

$$h_n'(t) = \sum_{s=n}^{+\infty} \binom{s-1}{n-1} t^{s-1} = \sum_{i=n-1}^{+\infty} \binom{i}{n-1} t^i = \frac{t^{n-1}}{(1-t)^n} \quad \text{(d'après 3.(c))}.$$

Ainsi, pour tout $q \in [0,1[$, $h_n(q) = \int_0^q \frac{t^{n-1}}{(1-t)^n} dt$.

(b) Comme $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ est C^1 sur $[0,q]$, le changement de variable est licite. De plus :

- si $t : 0 \to q$, alors $y : 0 \to \frac{q}{p}$;
- $y = \frac{t}{1-t} \Leftrightarrow (1-t)\,y = t \Leftrightarrow t = \frac{y}{1+y}$ donc $\frac{t^{n-1}}{(1-t)^n} = \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{n-1}} \times \frac{(1+y)^n}{1^n} = y^{n-1}(1+y)$;
- $dt = \frac{1}{(1+y)^2} dy$.

On a donc :

$$h_n(q) = \int_0^q \frac{t^{n-1}}{(1-t)^n} dt = \int_0^{q/p} y^{n-1}(1+y) \frac{1}{(1+y)^2} dy = \int_0^{q/p} \frac{y^{n-1}}{1+y} dy$$

Par intégration par parties, avec u et v qui sont C^1 sur $[0, q/p]$ et $u\left(y\right) = \frac{1}{1+y}$, $u'\left(y\right) = \frac{-1}{(1+y)^2}$, $v'\left(y\right) = y^{n-1}$ et $v\left(y\right) = \frac{1}{n} y^n$, on a :

$$\begin{aligned} h_n(q) &= \left[\frac{1}{1+y} \frac{1}{n} y^n\right]_0^{q/p} - \int_0^{q/p} \frac{-1}{(1+y)^2} \frac{1}{n} y^n dy \\ &= \frac{1}{n} \frac{q^n/p^n}{1+\frac{q}{p}} + \frac{1}{n} \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy \\ &= \frac{q^n}{np^{n-1}} + \frac{1}{n} \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy. \end{aligned}$$

14. (a) On a :

$$\begin{aligned} b_n(p) &= E(Y_n) - p = n\left(\frac{p}{q}\right)^n h_n(q) - p = n\left(\frac{p}{q}\right)^n \left[\frac{q^n}{n\,p^{n-1}} + \frac{1}{n}\int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy\right] - p \\ &= p + \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy - p = \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $y \in [0, q/p]$, on a :

$$(1+y)^2 > 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(1+y)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^n}{(1+y)^2} \leq y^n.$$

En intégrant pour y allant de 0 à p/q (bornes croissantes), on a :

$$0 \leq \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy \leq \int_0^{q/p} y^n dy = \frac{1}{n+1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

et donc

$$0 \leq \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy \leq \frac{1}{n+1}\frac{q}{p}.$$

Finalement, $0 \leq b_n(p) \leq \dfrac{1}{n+1}\dfrac{q}{p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, $b_n(p) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme $E(Y_n) = b_n(p) + p$, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = p$.

(c) On réintègre $\displaystyle\int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy$ par parties, avec $u(y) = \dfrac{1}{(1+y)^2}$, $u'(y) = \dfrac{-2}{(1+y)^3}$ et $v'(y) = y^n$ et $v(y) = \dfrac{1}{n+1}y^{n+1}$ (u et v sont C^1 sur $[0, p/q]$). On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy &= \left[\frac{1}{(1+y)^2}\frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]_0^{q/p} - \int_0^{q/p} \frac{-2}{(1+y)^3}\frac{1}{n+1}y^{n+1}dy \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{q^{n+1}/p^{n+1}}{\left(1+\frac{q}{p}\right)^2} + \frac{2}{n+1}\int_0^{q/p} \frac{y^{n+1}}{(1+y)^3}dy \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{q^{n+1}}{p^{n-1}} + \frac{2}{n+1}\int_0^{q/p} \frac{y^{n+1}}{(1+y)^3}dy \end{aligned}$$

et donc

$$b_n(p) = \left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^n}{(1+y)^2}dy = \frac{pq}{n+1} + \frac{2}{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)^n \int_0^{q/p} \frac{y^{n+1}}{(1+y)^3}dy.$$

Comme précédemment $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n \displaystyle\int_0^{q/p} \frac{y^{n+1}}{(1+y)^3}dy \leq \dfrac{1}{n+2}\dfrac{q}{p}$ et tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc

$$b_n(p) = \frac{pq}{n+1} + \frac{2}{n+1}o(1).$$

Alors :

$$\frac{b_n(p) - \frac{pq}{n}}{1/n} = n\left(\frac{pq}{n+1} + \frac{2}{n+1}o(1) - \frac{pq}{n}\right) = -\frac{pq}{n+1} + \frac{2}{1+1/n}o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement,

$$\frac{b_n(p) - \frac{pq}{n}}{1/n} = o(1) \quad \text{donc} \quad b_n(p) = \frac{pq}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

15. (a) La question 14.(c) donne $b_n(p) = \dfrac{pq}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $E(Y_n) = b_n(p) + p$, on en déduit :

$$(E(Y_n))^2 = \left[p + \frac{pq}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 = p^2 + 2\frac{p^2 q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) On admet que, lorsque n tend vers $+\infty$: $E(Y_n^2) = p^2 + \dfrac{3p^2 q}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On a alors (avec K-H) :

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= E\left(Y_n^2\right) - (E(Y_n))^2 \\ &= \left(p^2 + \frac{3p^2 q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(p^2 + 2\frac{p^2 q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{p^2 q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{p^2 q}{n}\left[1 + o(1)\right] \sim \frac{p^2 q}{n} \end{aligned}$$

16. (a) On a :

$$(-a_\alpha \leq T_n \leq a_\alpha) = \left(-a_\alpha \leq \frac{Y_n - p}{\sqrt{\frac{p^2 q}{n}}} \leq a_\alpha\right) = \left(Y_n + a_\alpha\sqrt{\frac{p^2 q}{n}} \geq p \geq Y_n - a_\alpha\sqrt{\frac{p^2 q}{n}}\right)$$

Donc $P\left(Y_n - a_\alpha p\sqrt{\dfrac{q}{n}} \leq p \leq Y_n + a_\alpha p\sqrt{\dfrac{q}{n}}\right) = P(-a_\alpha \leq T_n \leq a_\alpha) = 1 - \alpha$.

(b) Pour encadrer plus largement (mais sans faire intervenir p), on étudie les variations de $p\sqrt{q}$ ou plutôt de son carré $p^2(1-p) = f(p)$ sur $[0,1]$. f est définie, continue et dérivable et $f'(p) = 2p - 3p^2 = p(2-3p)$ d'où :

p	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

Donc $0 \leq p^2 q \leq \dfrac{4}{27}$ et $0 \leq p\sqrt{q} \leq \dfrac{2}{2\sqrt{3}}$ pour tout $p \in]0,1[$ (par croissance de la racine carrée).

Donc avec $I_n = Y_n - \dfrac{2a_\alpha}{3\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $J_n = Y_n + \dfrac{2a_\alpha}{3\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$(-a_\alpha \leq T_n \leq a_\alpha) \subset (I_n \leq p \leq J_n)$$

et donc

$$P(I_n \leq p \leq J_n) \geq P(-a_\alpha \leq T_n \leq a_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Ainsi, avec les I_n et J_n ci-dessus, le niveau de confiance de $[I_n, J_n]$ est d'au moins $1 - \alpha$.

(c) On suppose que $n = 900$. Un échantillon observé $x_1, x_2, \ldots, x_{900}$ de réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{900}$ a fourni le résultat suivant : $\overline{x}_{900} = \dfrac{1}{900}\displaystyle\sum_{i=1}^{900} x_i = 4$.

On a $Y_{900} = \dfrac{900}{S_{900}} = \dfrac{1}{\overline{X}_{900}}$ dont la réalisation est ici $1/4 = 0,25$.

On se donne un niveau de risque $\alpha = 0,05$. Le nombre $a_{0,05}$ est à peu près égal à 2.
Sachant que $\dfrac{2}{45\sqrt{3}} \approx 0,026$, un intervalle de confiance réalisé qui contienne le paramètre inconnu p avec un niveau de confiance au moins égal à $0,95$ est : $[I_{900}, J_{900}]$
Comme $\dfrac{2a_\alpha}{3\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2a_\alpha}{3\sqrt{3}}\dfrac{1}{30} = \dfrac{a_\alpha}{45\sqrt{3}} \simeq 0,026$, $[0,25 - 0,026\ ;\ 0,25 + 0,026]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95%.