Révisions 9

Correction du sujet ESSEC

Sujet ESSEC 1 2019

Exercice

1. (a) i. Un calcul matriciel direct donne :

$$M = CL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^2 = 0.$$

ii. On a :

$$rg(M) = \dim\left(Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

iii. On a $M^2 = 0$ donc X^2 est un polynôme annulateur de M. Il s'ensuit que la seule valeur propre possible pour M est 0. En outre, $rg(M) = 1$ donc M est non inversible et $0 \in Sp(M)$. Ainsi, $Sp(M) = \{0\}$.

Supposons que M soit diagonalisable. Alors il existerait P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Comme $Sp(M) = \{0\}$, $D = 0$ et donc $M = 0$ ce qui n'est pas le cas. Donc M n'est pas diagonalisable.

(b) i. On a avec le pivot :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$
$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2)$$

Ainsi, $rg(P) = 3$ et donc P est inversible.

Un calcul direct donne

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Posons alors $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice de rang 3, elle est donc inversible et il suit de la discussion précédente que

$$R^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On pose donc $Q={}^tR^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$.

iii. On a :

$$PMQ=PCLQ=PC\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. Attention au décalage d'indice : dans cette question 2, la ligne L_i désigne la i-ième ligne de la matrice sur `Python` (avec une numérotation qui commence à 0).

   (a) On propose les programmes suivants :

```python
def addlig(b, i, j, A):
    n, p = np.shape(A)
    for k in range(p):
        A[i, k] = A[i, k]+b*A[j, k]
    return(A)
```

   et

```python
def echlig(i, j, A):
    n, p = np.shape(A)
    for k in range(n):
        aux = A[i, k]
        A[i, k] = A[j, k]
        A[j, k] = aux
    return(A)
```

   (b) La matrice D est une matrice diagonale avec des 1 partout sur la diagonale sauf au coefficient (i,i) qui vaut a. On sait alors (ou on le vérifie à l'aide de la formule du produit matriciel) que multiplier A par D à gauche (à droite, respectivement) revient à multiplier la i-ème ligne (colonne, respectivement) de A par a.

   Ainsi, le programme `multligmat` effectue bien l'opération $L_i \leftarrow aL_i$.

3. (a) i. Si on note $L_1,\dots,L_n$ les lignes de M, on a $rg(M)=1$ donc toutes les lignes sont colinéaires et il en existe au moins une non nulle. Autrement dit, il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $L_{i_0}\neq 0$ et, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, il existe $c_i\in\mathbb{R}$ tel que $L_i=c_iL_{i_0}$. Posons alors $C=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$ et $L=L_{i_0}$. Alors :

$$CL=\begin{pmatrix}c_1L_{i_0}\\c_2L_{i_0}\\\vdots\\c_nL_{i_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{pmatrix}=M.$$

ii. On a

$$MC = CLC = C\left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) C$$

et $C \neq 0$ donc $\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i \in Sp(M)$.

iii. Comme $rg(M) = 1$, M est non inversible et donc $0 \in Sp(M)$ et $\dim(E_0(M)) = n - rg(M) = n - 1$. On peut donc trouver une base $(v_2, \ldots, v_n)$ de $E_0(M)$.

Posons $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i$. Comme $\sigma \in Sp(M)$, il existe un vecteur propre v_1 de M associé à σ (on peut par exemple prendre $v_1 = C$).

Si $\sigma \neq 0$, alors par concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de cardinale $n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M. Ainsi, M est diagonalisable.

(b) i. Considérons R la matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de la question précédente. Alors d'après le cours, $M = RDR^{-1}$ avec $D = diag(\sigma, 0, \ldots, 0)$. Alors :

$$\frac{1}{\sigma} R^{-1} M R = \frac{1}{\sigma} D = E_{1,1}.$$

En posant $P = \frac{1}{\sigma} R^{-1}$ et $Q = R$, on a donc $PMQ = E_{1,1}$.

ii. Considérons, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, les matrices

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{j,i} + E_{i,j}.$$

Elles sont inversibles (car clairement de rang n) et on peut vérifier que :

$$P_{1,i} E_{1,1} = E_{i,1} \quad \text{et} \quad E_{i,1} P_{1,j} = E_{i,j}.$$

On a donc avec la question précédente :

$$P_{1,i} PMQ P_{1,j} = P_{1,i} E_{1,1} P_{1,j} = E_{i,j}.$$

Ainsi, en posant $P_i = P_{1,i} P$ et $Q_j = Q P_{1,j}$, on a donc deux matrices inversibles (car produits de matrices inversibles) telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.

Problème

1. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il suit du théorème de transfert que

$$M_X(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{kt} P(X = k).$$

Or, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $t \mapsto e^{kt}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par combinaison linéaire, M_X est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, on montre par une récurrence immédiate sur p que la dérivée p-ème de $t \mapsto e^{kt}$ est $t \mapsto k^p e^{kt}$. Ainsi, par somme,

$$M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} k^p e^{kt} P(X = k).$$

et donc, d'après le théorème de transfert,

$$M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^{n} k^p P(X = k) = E(X^p).$$

(c) i. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_X(e^t) &= \sum_{k=0}^{2n} P(X=k-n)e^{kt} = \sum_{\substack{j=-n \\ (j=k-n)}}^{n} P(X=j)e^{(j+n)t} \\ &= e^{nt} \sum_{j=-n}^{n} P(X=j)e^{jt} = e^{nt} M_X(t). \end{aligned}$$

ii. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M_X(t) = M_Y(t)$ donc, d'après la question précédente,

$$G_X(e^t) = e^{nt}M_X(t) = e^{nt}M_Y(t) = G_Y(e^t).$$

iii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$G_X(e^t) = G_Y(e^t) \Leftrightarrow G_X(e^t) - G_Y(e^t) = 0 \Leftrightarrow (G_X - G_Y)(e^t) = 0.$$

La fonction polynôme $G_X - G_Y$ admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous forme développée, tous les coefficients de $G_X - G_Y$ sont nuls et il s'ensuit que

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad P(X=k-n) = P(Y=k-n)$$

et donc, en posant $j = k-n$, on a

$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \quad P(X=j) = P(Y=j).$$

Ainsi, X et Y suivent la même loi.

2. (a) i. $S(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ donc, par produit, $Y_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [\![-2, 2]\!]$.

ii. Dressons le tableau croisé des valeurs de Y_2 en fonction des valeurs de S et de X_2.

$S \setminus X_2$	0	1	2
-1	0	-1	-2
1	0	1	2

Ainsi, par indépendance de S et de X_2,

$$P(Y_2=-2) = P((S=-1) \cap (X_2=2)) = P(S=-1)P(X_2=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

De même,

$$P(Y_2=-1) = \frac{1}{4},\ P(Y_2=0) = \frac{1}{4},\ P(Y_2=1) = \frac{1}{4},\ P(Y_2=2) = \frac{1}{8}.$$

En résumé :

y	-2	-1	0	1	2
$P(Y_2=y)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

(b) Dressons le tableau croisé des valeurs de $X_2 - (S+1)$ en fonction des valeurs de S et de X_2.

$S \setminus X_2$	0	1	2
-1	0	1	2
1	-2	-1	0

Ainsi, par indépendance de S et de X_2,

$$P(X_2-(S+1)=-2) = P((S=1) \cap (X_2=0)) = P(S=1)P(X_2=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

De même, on calcule les autres probabilités et on obtient :

y	-2	-1	0	1	2
$P(X_2-(S+1)=y)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

3. (a) `X` contient une matrice à n lignes et 2 colonnes de simulations de X_2.
   `S` contient une matrice à n lignes et 2 colonnes de simulations de S.

   (b) Chaque ligne de `Z1` contient une simulation du couple $(SX_2, X_2 - (S+1))$.
   Chaque ligne de `Z2` contient une simulation du couple $(SX_2, X_2' - (S'+1))$ où X_2' et S' sont des variables aléatoires de même loi que X_2 et S respectivement et indépendantes de ces variables.

   (c) D'après la loi faible des grands nombres,

$$\texttt{p1} \simeq P(SX_2 = X_2 - (S+1))$$

et

$$\texttt{p2} \simeq P(SX_2 = X_2' - (S'+1)).$$

Or, comme on l'observe aisément à partir des tableaux croisés,

$$P(SX_2 = X_2 - (S+1)) = P((X_2 = 0) \cap (S = -1)) = P(X_2 = 0)P(S = -1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

et, d'autre part, si on pose $Y_2' = X_2' - (S'+1)$ qui est donc indépendante et de même loi que Y_2, on a

$$\begin{aligned} P(SX_2 = X_2' - (S'+1)) &= P(Y_2 = Y_2') \\ &= \sum_{k=-n}^{n} P((Y_2 = k) \cap (Y_2' = k)) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} P(Y_2 = k)^2 \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ &= \frac{7}{32}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\texttt{p1} \approx \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \texttt{p2} \approx \frac{7}{32}.$$

Remarque : Une exécution du script Scilab proposé a renvoyé `p1 = 0.1244` et `p2 = 0.21921` alors que $\frac{1}{8} = 0.125$ et $\frac{7}{32} = 0.21875$. Ces observations sont donc bien en accord avec nos résultats (ouf !).

4. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tX_n} prend un nombre fini de valeurs donc admet une espérance, ce qui prouve que $M_{X_n}(t)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. En outre, avec $p = q = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{kt} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{kt} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k q^{n-k} = (q + pe^t)^n = \frac{(1+e^t)^n}{2^n}. \end{aligned}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
& M_{Y_n}(t) \\
= & \sum_{k=-n}^{n} e^{kt} P(Y_n = k) \quad \text{(thm de transfert)} \\
= & \sum_{k=-n}^{n} e^{kt} \left(P((Y_n = k) \cap (S = -1)) + P((Y_n = k) \cap (S = 1))\right) \quad \text{(SCE } (S = \pm 1)\text{)} \\
= & \sum_{k=-n}^{n} e^{kt} \left(P((X_n = -k) \cap (S = -1)) + P((X_n = k) \cap (S = 1))\right) \\
= & \sum_{k=-n}^{0} e^{kt} P((X_n = -k) \cap (S = -1)) + \sum_{k=0}^{n} e^{kt} P((X_n = k) \cap (S = 1)) \\
= & \sum_{k=-n}^{0} \frac{e^{kt}}{2} P(X_n = -k) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kt}}{2} P(X_n = k) \quad \text{(indép. de } S \text{ et } X_2\text{)} \\
= & \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-kt}}{2} P(X_n = k) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kt}}{2} P(X_n = k) \\
= & \frac{1}{2} \left(M_{X_n}(-t) + M_{X_n}(t)\right) \\
= & \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + e^{-t})^n + (1 + e^t)^n\right).
\end{aligned}$$

(c) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \left[e^{-nt}(1 + e^t)^n + (1 + e^t)^n\right] = \frac{1}{2^{n+1}}(1+e^t)^n \left[1 + e^{-nt}\right] = M_{X_n}(t) \times \frac{1 + e^{-nt}}{2}.$$

Considérons alors une variable aléatoire H_n indépendante de X_n et de loi uniforme sur $\{0, n\}$. On a donc avec le théorème de transfert :

$$M_{H_n}(t) = e^{0t} P(H_n = 0) + e^{nt} P(H_n = n) = \frac{1 + e^{nt}}{2}.$$

Mais alors (par indépendance à la troisième égalité) :

$$\begin{aligned}
M_{X_n - H_n}(t) &= E(e^{t(X_n - H_n)}) = E(e^{tX_n} e^{-tH_n}) = E(e^{tX_n}) E(e^{-tH_n}) \\
&= M_{X_n}(t) M_{H_n}(-t) = M_{X_n}(t) \times \frac{1 + e^{-nt}}{2} = M_{Y_n}(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, Y_n et $X_n - H_n$ ont la même fonction génératrice des moments et en outre $(X_n - H_n)(\Omega) = [\![-n, n]\!] = Y_n(\Omega)$ de sorte qu'il suit de 1.(c) que Y_n et $X_n - H_n$ ont la même loi.

5. (a) On a $K_X(0) = \ln(M_X(0))$ mais

$$M_X(0) = E(e^{0 \times X}) = E(1) = 1.$$

Ainsi, $K_X(0) = 0$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout t tel que $at \in \mathcal{D}_X$,

$$K_Y(t) = \ln(M_Y(t)) = \ln(E(e^{tY})) = \ln(E(e^{atX+tb})) = \ln(e^{tb} E(e^{atX})) = tb + \ln(M_X(at)) = tb + K_X(at).$$

Ainsi, $K_{aX+b}(t) = tb + K_X(at)$.

(c) Si X et $-X$ ont la même loi, on a $K_X = K_{-X}$ mais, pour tout t, on a $K_{-X}(t) = E(e^{t(-X)}) = E(e^{-tX}) = K_X(-t)$ et donc K_X est paire.
Or on sait que la dérivée d'une fonction paire (respectivement impaire) est une fonction impaire (respectivement paire). Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_X^{(2p+1)}$ est impaire et donc en particulier

$$Q_{2k+1}(X) = K_X^{(2k+1)}(0) = 0$$

.

6. (a) Soit $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$. Puisque X et Y sont indépendantes, il suit du lemme des coalitions que e^{tX} et e^{tY} le sont aussi. Alors, (par indépendance à la quatrième égalité)

$$\begin{aligned} K_{X+Y}(t) &= \ln(M_{X+Y}(t)) = \ln(E(e^{t(X+Y)})) = \ln(E(e^{tX}e^{tY})) = \ln(E(e^{tX})E(e^{tY})) \\ &= \ln(M_X(t)) + \ln(M_Y(t)) = K_X(t) + K_Y(t). \end{aligned}$$

(b) Par linéarité de la dérivation, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$K_{X+Y}^{(p)} = K_X^{(p)} + K_Y^{(p)}.$$

En évaluant en 0, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, Q_p(X+Y) = Q_p(X) + Q_p(Y).$$

7. (a) Si $t \neq 0$, on a avec le théorème de transfert :

$$M_U(t) = E(e^{tU}) = \int_0^1 e^{tu}\, du \left[\frac{e^{tu}}{t}\right]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Et si $t = 0$,

$$M_U(0) = E(e^{0\times U}) = E(1) = 1.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

(b) La fonction M_U est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad M_U'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}.$$

(c) Soit $t \neq 0$. Alors, en procédant à un développement limité en 0, on a

$$\frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{e^t - 1}{t} - 1\right) = \frac{1}{t^2}(e^t - (1+t)) = \frac{1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - (1+t)\right) = \frac{1}{2} + o(1)$$

Ainsi,

$$M_U'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}.$$

(d) M_U' est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. En outre, si $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} M_U'(t) &= \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} = \frac{t(1 + t + o(t)) - (1 + t + t^2/2 + o(t^2)) + 1}{t^2} \\ &= \frac{t + t^2 - 1 - t - t^2/2 + o(t^2)) + 1}{t^2} = \frac{t^2/2}{t^2} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{2} = M_U'(0). \end{aligned}$$

Ainsi, M_U' est continue sur $\mathbb{R}$ et M_U est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Le sujet ne demande pas de prouver la continuité de M_U sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. Mais comme la dérivabilité implique la continuité, elle est aussi continue !

8. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
   (a) Puisque $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on a $(\beta-\alpha)U + \alpha \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha,\beta])$. Ainsi, il suit du 5.(b) que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad K_X(t) = K_{(\beta-\alpha)U+\alpha}(t) = \alpha t + K_U((\beta-\alpha)t).$$
   (b) Puisque M_U est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives (ce que l'on vérifie par une rapide disjonction de cas), $K_U = \ln \circ M_U$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il suit alors de la question précédente que, par composition et somme avec des fonctions affines, K_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$K'_X(t) = \alpha + (\beta-\alpha)K'_U((\beta-\alpha)t)$$
   de sorte que (avec la question 7)
   $$\begin{aligned} Q_1(X) &= K'_X(0) = \alpha + (\beta-\alpha)K'_U(0) = \alpha + (\beta-\alpha)\frac{M'_U(0)}{M_U(0)} \\ &= \alpha + (\beta-\alpha)\frac{1/2}{1} = \alpha + (\beta-\alpha)E(U) = E(\alpha+(\beta-\alpha)U) = E(X). \end{aligned}$$

9. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a avec le théorème de transfert et sous réserve de convergence :
   $$M_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{kt} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda}\exp(\lambda e^t) = \exp(\lambda(e^t-1)).$$
   et
   $$K_T(t) = \ln(M_T(t)) = \lambda(e^t-1).$$
   (b) On montre par une récurrence immédiate sur $p \in \mathbb{N}^*$ que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad K_T^{(p)}(t) = \lambda e^t$$
   de sorte que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad Q_p(T) = K_T^{(p)}(0) = \lambda.$$

10. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{tx-\frac{x^2}{2}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout segment. En particulier, $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge.
   Par ailleurs, en $\pm\infty$,
   $$e^{tx-\frac{x^2}{2}} = o(e^{-\frac{x^2}{4}}) = o(\frac{1}{x^2}) \quad \text{(par croissance comparée)}.$$
   Puisque les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ convergent, il suit du théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$ convergent.
   Il s'ensuit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$ converge.
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
   $$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-x^2/2}\,dx$$
   qui est une intégrale convergente d'après la question précédente, de sorte que M_Z est définie sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} M_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-x^2/2}\,dx = e^{t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2+tx-x^2/2}\,dx \\ &= e^{t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\,dx = e^{t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,dx = e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

(c) Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, $N \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors $\sigma Z + m \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a (d'après 5.(b) et 10.(b))

$$K_N(t) = K_{\sigma Z+m}(t) = mt + K_Z(\sigma t) = mt + \ln(\exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})) = mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}.$$

Ainsi,

$$K_N'(t) = m + \sigma^2 t, \quad K_N''(t) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 3, \quad K_N^{(p)}(t) = 0.$$

Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad Q_p(N) = \begin{cases} m & \text{si } p = 1, \\ \sigma^2 & \text{si } p = 2, \\ 0 & \text{si } p \geq 3. \end{cases}$$

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

(a) Considérons $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de loi $\mathcal{P}(1)$, chaque variable aléatoire a donc une espérance égale à 1 et une variance égale à 1 également. D'après le théorème de stabilité pour la loi de Poisson, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$$

et donc, d'après le théorème de la limite centrée, on a

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(0,1).$$

Puisque T_n et S_n ont la même loi, si on considère W une variable aléatoire de loi $\mathcal{L}(0,1)$, on a donc $W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$M_{W_n}(t) = E(e^{t\left(\frac{T_n - n}{\sqrt{n}}\right)}) = e^{-\sqrt{n}t} E(e^{t\frac{T_n}{\sqrt{n}}}) = e^{-\sqrt{n}t} M_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi, donc (avec la question 9.(a)),

$$K_{W_n}(t) = \ln(M_{W_n}(t)) = -\sqrt{n}t + K_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1).$$

(c) Si on pose $u = \frac{t}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, on peut utiliser le développement limité $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ et on obtient lorsque n tend vers $+\infty$,

$$e^{t/\sqrt{n}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

et donc

$$n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) = \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} + o(1)$$

et donc lorsque n tend vers $+\infty$,

$$K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} + o(1),$$

et donc, d'après 10.(b),

$$\lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t).$$

12. On a
$$Q_1(X) = K_X'(0) = \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} = \frac{E(X)}{1} = E(X)$$
et
$$Q_2(X) = K_X''(0) = \frac{M_X''(0)M_X(0) - M_X'(0)^2}{M_X(0)^2} = \frac{E(X^2)\times 1 - E(X)^2}{1^2} = V(X).$$

13. (a) On a
$$S^4 = (X_1 - X_2)^4 = X_1^4 - 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + X_2^4$$
donc, comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi que X, on a
$$\begin{aligned} E(S^4) &= E(X_1^4) - 4E(X_1^3)E(X_2) + 6E(X_1^2)E(X_2^2) - 4E(X_1)E(X_2^3) + E(X_2^4) \\ &= E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2. \end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$(X - E(X))^4 = X^4 - 4X^3E(X) + 6X^2E(X)^2 - 4XE(X)^3 + E(X)^4$$
donc
$$\mu_4(X) = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E(X)^2 - 4E(X)E(X)^3 + E(X)^4$$
et donc
$$2\mu_4(X) = 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 12E(X^2)E(X)^2 - 6E(X)^4.$$
Enfin,
$$V(X)^2 = (E(X^2) - E(X)^2)^2 = E(X^2)^2 - 2E(X^2)E(X)^2 + E(X)^4$$
de sorte que
$$6V(X)^2 = 6E(X^2)^2 - 12E(X^2)E(X)^2 + 6E(X)^4.$$
Ainsi, en effectuant la différence
$$2\mu_4(X) + 6V(X)^2 = 2E(X^4) - 8E(X)E(X^3) + 6E(X^2)^2 = E(S^4).$$
On a donc bien $E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6V(X)^2$.

(b) On a $M_S = e^{K_S}$ donc
$$M_S' = K_S'e^{K_S} = K_S'M_S.$$
Alors,
$$M_S^{(4)} = (M_S')^{(3)} = (K_S'M_S)^{(3)}$$
ce qui donne en dérivant 3 fois des produits :
$$M_S^{(4)} = K_S^{(4)}M_S + 3K_S^{(3)}M_S' + 3K_S''M_S'' + K_S'M_S^{(3)}.$$

(c) En évaluant en 0 l'égalité précédente, on a
$$\begin{aligned} M_S^{(4)}(0) &= K_S^{(4)}(0)M_S(0) + 3K_S^{(3)}(0)M_S'(0) + 3K_S''(0)M_S''(0) + K_S'(0)M_S^{(3)}(0) \\ &= Q_4(S) + 3Q_3(S)M_S'(0) + 3Q_2(S)M_S''(0) + Q_1(S)M_S^{(3)}(0). \end{aligned}$$
Mais, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$K_S(t) = K_{X_1 - X_2}(t) = K_{X_1}(t) + K_{-X_2}(t) = K_X(t) + K_X(-t)$$
de sorte que K_S est paire et donc K_S' et $K_S^{(3)}$ sont impaires. Ainsi, $Q_1(S) = Q_3(S) = 0$. Il s'ensuit que
$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S)M_S''(0).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_S(t) = M_{X_1-X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t) = M_X(t)M_X(-t)$$

de sorte que

$$M_S''(t) = M_X''(t)M_X(-t) - 2M_X'(t)M_X'(-t) + M_X(t)M_X''(-t)$$

et donc

$$\begin{aligned}
M_S''(0) &= M_X''(0)M_X(0) - 2M_X'(0)^2 + M_X(0)M_X''(0)\\
&= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X^2)\\
&= 2E(X^2) - 2E(X)^2\\
&= 2V(X) = V(S).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S)V(S)$$

mais comme $K_S(t) = K_X(t) + K_X(-t)$, il vient

$$Q_2(S) = 2Q_2(X) = 2V(X) = V(S)$$

et donc

$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3V(S)^2.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $M_S^{(4)} = E(S^4)$. Pour cela, on part de l'identité, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_S(t) = M_X(t)M_X(-t)$$

que l'on dérive quatre fois :

$$\begin{aligned}
M_S^{(4)}(t) &= M_X^{(4)}(t)M_X(-t) - 4M_X^{(3)}(t)M_X'(-t) + 6M_X''(t)M_X''(-t) - 4M_X'(t)M_X^{(3)}(-t)\\
&\quad +M_X(t)M_X^{(4)}(-t).
\end{aligned}$$

En évaluant en 0, on obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
M_S^{(4)}(0) &= M_X^{(4)}(0)M_X(0) - 4M_X^{(3)}(0)M_X'(0) + 6M_X''(0)M_X''(0) - 4M_X'(0)M_X^{(3)}(0)\\
&\quad +M_X(0)M_X^{(4)}(0)\\
&= E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2 - 4E(X)E(X^3) + E(X^4)\\
&= 2E(X^4) - 8E(X)E(X^3) + 6E(X^2)^2\\
&= E(S^4).
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien

$$E(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2.$$

14. En recoupant 13.(a) et 13.(c), puisque $V(S) = 2V(X)$ et $Q_4(S) = 2Q_4(X)$, on a

$$\begin{aligned}
Q_4(S) + 3(V(S))^2 = 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2 &\Leftrightarrow 2Q_4(X) + 12(V(X))^2 = 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2\\
&\Leftrightarrow 2Q_4(X) = 2\mu_4(X) - 6(V(X))^2\\
&\Leftrightarrow Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2$.