Correction du TD 0

Révisions de première année

Sommes et produits

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4k-1) &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1 = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}-n \\ &= \frac{n}{2}\left((n+1)(2n+1)+4(n+1)-2\right) = \frac{n}{2}(2n^2+7n+3).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{3n}k^2 &= \sum_{i=0}^{2n}(i+n)^2 = \sum_{i=0}^{2n}i^2+2n\sum_{i=0}^{2n}i+\sum_{i=0}^{2n}n^2 \\ &= \frac{(2n)(2n+1)(4n+1)}{6}+2n\frac{(2n)(2n+1)}{2}+n^2(2n+1) \\ &= n(2n+1)\left(\frac{4n+1}{3}+2n+2\right) = \frac{n(2n+1)(10n+7)}{3}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k3^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}3^n\left(\frac{-1}{3}\right)^k = 3^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^k = 3^n\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)} \\ &= \frac{3^{n+1}}{4}\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3^{n+1}}{4}+\frac{(-1)^n}{4}.\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+1}}{5^{k-1}} = 10\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = 10\times\left(\frac{4}{5}\right)^1\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}} = 40-40\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

5.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) &= \sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
&= \sqrt{n+1}-1.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{k} - \frac{2}{k-1} - \frac{3}{k+1} &= \frac{5(k-1)(k+1) - 2k(k+1) - 3k(k-1)}{k(k-1)(k+1)} \\
&= \frac{5k^2 - 5 - 2k^2 + 2k - 3k^2 + 3k}{k(k^2-1)} = \frac{k-5}{k(k^2-1)}
\end{aligned}$$

2. On a alors :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{k} - \frac{2}{k-1} - \frac{3}{k+1} \right) = 5 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - 3 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

On effectue les changements de variables $i = k-1$ dans la deuxième somme et $j = k+1$ dans la troisième. On obtient :

$$\begin{aligned}
S_n &= 5 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - 3 \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \\
&= 5 \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) - 2 \left(\sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - 3 \left(\sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= (5-2-3) \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{5}{2} + \frac{5}{n} - 2 - 1 - \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

1.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

2.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{5^k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2^{2k}}{\prod_{k=1}^{n} 5^k} = \frac{2^{2\sum_{k=1}^{n} k}}{5^{\sum_{k=1}^{n} k}} = \frac{2^{2\frac{n(n+1)}{2}}}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n(n+1)}.$$

3.

$$\prod_{k=n}^{2n} \frac{3^k}{4^{k-n}} = \prod_{i=0}^{n} \frac{3^{i+n}}{4^i} = \frac{\prod_{i=0}^{n} 3^{i+n}}{\prod_{i=0}^{n} 4^i} = \frac{3^{\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} n}}{4^{\sum_{i=0}^{n} i}} = \frac{3^{\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)}}{4^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}n(n+1)}}{2^{n(n+1)}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^{n(n+1)}.$$

Exercice 4

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{2^{n-k}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k}{2^{n-k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\frac{1}{2^{n-k}}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-j}=n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{1}{k+1}\times(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\times(-1)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}\times\frac{1}{n+1}\times(-1)^k\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l}(-1)^{l-1}\\ &= \frac{-1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l}(-1)^l=\frac{-1}{n+1}\left(\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}(-1)^l1^{n+1-l}-1\right)\\ &= \frac{-1}{n+1}\left((-1+1)^{n+1}-1\right)=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n(n-1)\times(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!}=n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\\ &= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}1^j1^{n-2-j}=n(n-1)2^{n-2}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} 2^k k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} 2^k k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} 2^k k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} + \sum_{k=1}^{n} 2^k k \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} 2^k \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} + \sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} 2^k n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} + \sum_{k=1}^{n} 2^k n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} 2^k + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k \\
&= n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} 2^{i+2} + n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^{j+1} \\
&= 4n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} 2^i 1^{n-2-i} + 2n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^j 1^{n-1-j} \\
&= 4n(n-1)(2+1)^{n-2} + 2n(2+1)^{n-1} = 4n(n-1)3^{n-2} + 2n3^{n-1} \\
&= 2n3^{n-2}(2(n-1)+3) = 2n(2n+1)3^{n-2}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} ij \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \times \frac{j(j+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)\left(3n(n+1) + 2(2n+1)\right)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} (i+j) \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{(j-1)j}{2} + (j-1)j \right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{3(j^2-j)}{2} = \frac{3}{2} \sum_{j=2}^{n} j^2 - \frac{3}{2} \sum_{j=2}^{n} j = \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - 1 \right) - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j - 1 \right) \\
&= \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{4} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

3.

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{i+j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(2^j \sum_{i=0}^{n} 2^i \right) = \sum_{j=0}^{n} 2^j \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} \frac{1-2^{n+1}}{-1} = (1-2^{n+1})^2.$$

4.
$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}1\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\times n=\frac{n(n+3)}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 6

1. En appliquant la formule du binôme de Newton à la troisième égalité, on obtient :
$$\sum_{0\le i\le j\le n}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{j}{i}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{j}{i}1^i1^{j-i}\right)=\sum_{j=0}^{n}2^j=2^0\times\frac{1-2^{n-0+1}}{1-2}=2^{n+1}-1.$$

2. En appliquant la formule du binôme de Newton à la quatrième et à la cinquième égalité, on obtient :
$$\begin{aligned}\sum_{0\le p\le k\le n}3^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}3^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\right)=\sum_{k=0}^{n}3^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^p1^{k-p}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}2^k=5^n.\end{aligned}$$

Suites réelles

Exercice 7

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmético-géométrique car elle n'est pas de la forme $u_{n+1}=au_n+b$ avec a et b deux constantes.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{3u_n+4^n}{4\times4^n}=\frac{3}{4}\times\frac{u_n}{4^n}+\frac{1}{4}\times\frac{4^n}{4^n}=\frac{3}{4}v_n+\frac{1}{4}.$$

3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On a :
$$x=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=1.$$
On considère alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n=v_n-1$. Alors :
$$w_{n+1}=v_{n+1}-1=\frac{3}{4}v_n+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{4}v_n-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(v_n-1)-\frac{3}{4}w_n.$$
Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $w_0=v_0-1=\frac{u_0}{4^0}-1=-1$. Donc, pour tout entier naturel n,
$$w_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\times(-1),\ \text{donc } v_n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n,\ \text{et } u_n=4^n\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$

Exercice 8

1. Pour tout entier naturel n,
$$x_{n+2}=5x_{n+1}+y_{n+1}=5x_{n+1}-6y_n,$$
en utilisant successivement les deux relations de l'énoncé. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=0$.

2. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

   Équation caractéristique : $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$ avec λ et μ à déterminer avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 5x_0 + y_0 = -1$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda 2^0 + \mu 3^0 & = & 0 \\ \lambda 2^1 + \mu 3^1 & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ 2\lambda + 3\mu & = & -1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda + \mu & = & 0 & (L_1) \\ \mu & = & -1 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & -1 \end{array}\right.$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^n - 3^n$.

   Avec la première relation de l'énoncé, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & x_{n+1} - 5x_n = 2^{n+1} - 3^{n+1} - 5(2^n - 3^n) \\ & = & 2 \times 2^n - 3 \times 3^n - 5 \times 2^n + 5 \times 3^n \\ & = & -3 \times 2^n + 2 \times 3^n. \end{array}$$

Exercice 9

1. (a) On pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien définie et $u_n \geq 1$.

   Initialisation : $u_0 = 2 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que u_n est bien définie et $u_n \geq 1$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée, c'est-à-dire que u_{n+1} est bien définie et que $u_{n+1} \geq 1$.

   Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$, donc $2 + u_n \geq 3$. En particulier, $2 + u_n \neq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ est donc bien définie.

   De plus, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{2+u_n}$. Comme $u_n - 1 \geq 0$ et $2 + u_n \geq 3$ (par hypothèse de récurrence), $u_{n+1} - 1 \geq 0$ et donc $u_{n+1} \geq 1$.

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, on a donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 1$.

   (b) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

   Tout d'abord, $\ell \geq 1$ car, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ (question précédente).

   De plus, par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$, on obtient :

$$\ell = \frac{1+2\ell}{2+\ell} \Leftrightarrow \ell - \frac{1+2\ell}{2+\ell} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell(2+\ell) - (1+2\ell)}{2+\ell} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^2 - 1}{2+\ell} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell^2 - 1 = 0 \\ 2 + \ell \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell = 1 \text{ ou } \ell = -1 \\ 2 + \ell \neq 0 \end{array}\right. \underset{\ell \geq 1}{\Leftrightarrow} \ell = 1.$$

   Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers 1.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1}{\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{3}v_n.$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

(b) $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$. On en déduit que :

$$\frac{u_n-1}{u_n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Leftrightarrow (u_n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(u_n+1) \Leftrightarrow u_n\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}.$$

(c) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. (a) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x} - x = \dfrac{-x^2+1}{2+x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{2+x}$. On obtient le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$1-x$		+		+		+	0	−	
$1+x$		−		−	0	+		+	
$2+x$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		+	‖	−	0	+	0	−	

(b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$. Or, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ (question 1) donc $f(u_n) \leq 0$ d'après le tableau de signe de la question précédente.
Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite finie ℓ. Et d'après la question 1.(b), $\ell = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. (a) Voici la procédure qui permet de calculer u_n :

```python
n = input('Donner n : ')
u = 2
for k in range(1,n+1):
    u = (1+2*u)/(2+u)
print(u)
```

(b) Voici la procédure qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| \leq \varepsilon$:

```
epsilon = input('Donner epsilon : ')
u = 2
n = 0
while np.abs(u-1) > epsilon :
    n = n+1
    u = (1+2*u)/(2+u)
print(n)
```

Exercice 10

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "u_n et v_n sont bien définis et $0 < u_n < v_n$".

   Initialisation : Par hypothèse, $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ donc u_0 et v_0 sont bien définis et $0 < u_0 < v_0$.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

   Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < v_n$, donc $u_n + v_n > 0$. On en déduit que $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$ sont bien définis (car le dénominateur est non nul).

   De plus, comme $0 < u_n < v_n$ (hypothèse de récurrence) et que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 < u_n^2 < v_n^2$. En divisant par $u_n + v_n > 0$, on obtient :

$$0 < \frac{u_n^2}{u_n + v_n} < \frac{v_n^2}{u_n + v_n},$$

   c'est à dire $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et $0 < u_n < v_n$.

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{-u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

   D'après la question 1, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, toujours avec la question 1, elle est minorée par 0. D'après le théorème des suites monotones, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie ℓ_1.

   (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - v_n = \frac{v_n^2 - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{-v_n u_n}{u_n + v_n}.$$

   D'après la question 1, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$. Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, toujours avec la question 1, elle est minorée par 0. D'après le théorème des suites monotones, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie ℓ_2.

   (c) On a démontré que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < v_n$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2. Par passage à la limite dans les inégalités (rappelons que les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite), on a donc $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2$.

3. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$v_n - u_n = 1$".

   Initialisation : Par hypothèse, $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ donc $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, $v_n - u_n = 1$. Alors :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - \frac{u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(v_n - u_n)(v_n + u_n)}{u_n + v_n} = v_n - u_n = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = 1$.

(b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2, on a par passage à la limite dans l'égalité obtenue à la question précédente, $\ell_2 - \ell_1 = 1$, donc $\ell_2 = 1 + \ell_1$.

(c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \Leftrightarrow u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$. En passant à la limite dans cette dernière relation, on obtient :

$$\ell_1(\ell_1 + \ell_2) = \ell_1^2 \Leftrightarrow \ell_1^2 + \ell_1\ell_2 = \ell_1^2 \Leftrightarrow \ell_1\ell_2 = 0.$$

Or, on a démontré à la question précédente que $\ell_2 = 1+\ell_1$. Donc on obtient $\ell_1(1+\ell_1) = 0$, donc $\ell_1 = 0$ ou $\ell_1 = -1$. Or d'après la question 2.(c), $\ell_1 \geq 0$. Donc $\ell_1 = 0$. Comme $\ell_2 = 1 + \ell_1$, on obtient $\ell_2 = 1$.

Exercice 11

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs" et montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = 2 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Par hypothèse de récurrence, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs. Donc $a_nb_n > 0$ donc $a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$ est bien définie et est > 0. Et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ est bien définie et est > 0.

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définies et strictement positifs.

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + b_n}{2} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2}.$$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$. Ainsi, $\forall\, n \geq 1$, $b_n \geq a_n$. Et $a_0 = 1 \leq 2 = b_0$. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_nb_n} - a_n = \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} - a_n = (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})\sqrt{a_n}.$$

   Or, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})\sqrt{a_n} \geq 0$ et la suite (a_n) est croissante.

   (c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

   D'après la question 3.(a), $a_n \leq b_n$ donc $b_{n+1} - b_n \leq 0$. La suite (b_n) est donc décroissante.

3. (a) On a vu à la question 3.(a) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. De plus, on a démontré à la question 3.(c) que (b_n) est décroissante donc (b_n) est majorée par son premier terme $b_0 = 2$. Donc, pour tout entier naturel n, $a_n \leq b_n \leq b_0 = 2$. La suite (a_n) est bien majorée par 2.

   D'après le théorème des suites monotones, comme (a_n) est croissante (question 3.(b)) et majorée par 2, elle converge vers une limite notée ℓ_1.

   (b) On a vu à la question 3.(a) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. De plus, on a démontré à la question 3.(b) que (a_n) est croissante donc (a_n) est minorée par son premier terme $a_0 = 1$. Donc, pour tout entier naturel n, $b_n \geq a_n \geq a_0 = 1$. La suite (b_n) est bien minorée par 1.

   D'après le théorème des suites monotones, comme (b_n) est décroissante (question 3.(c)) et minorée par 1, elle converge vers une limite notée ℓ_2.

   (c) Par passage à la limite dans l'égalité $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, on obtient :

$$\ell_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ell_2}{2} = \frac{\ell_1}{2} \Leftrightarrow \ell_1 = \ell_2.$$

Exercice 12

1. Voici la procédure qui permet de calculer u_n et v_n :

```
n = input('Donner n : ')
u = 1
v = 2
for k in range(n):
    x = u
    y = v
    u = (x+y)/2
    v = (u+y)/2
print(u,v)
```

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \frac{\frac{v_n - u_n}{2}}{2} = \frac{v_n - u_n}{4}.$$

   (b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation</u> : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

   On a:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},$$

   en utilisant la question 2.(a) à la première égalité et l'hypothèse de récurrence à la deuxième. On a ainsi montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, on a pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq 0, \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} = \frac{\frac{u_n - v_n}{2}}{2} \\ &= \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 0, \end{aligned}$$

en utilisant la question 2.(b). Donc (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

(b) Toujours avec la question 2.(b), $v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$.

Donc, comme (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite qu'on note ℓ.

(c) Voici la procédure pour obtenir une approximation de ℓ :

```
epsilon = input('Donner epsilon : ')
u = 1
v = 2
while np.abs(v-u) > epsilon :
    x = u
    y = v
    u = (x+y)/2
    v = (u+y)/2
print(u,v)
```

4. (a) D'après la question 2.(b), $w_n = v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(b) Par définition des suites (u_n) et (v_n), on a, pour tout entier $k \geq 1$:

$$w_k = v_k - u_k = \frac{u_k + v_{k-1}}{2} - \frac{u_{k-1} + v_{k-1}}{2} = \frac{u_k - u_{k-1}}{2}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}((u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1})) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(u_n - u_0) = 1 + \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}(u_n + 1). \end{aligned}$$

(c) Ainsi, avec les deux questions précédentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}(u_n + 1).$$

Donc :

$$u_n = 2\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3},$$

car $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$.

Ainsi, (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$ et donc $\ell = \frac{5}{3}$.

Exercice 13

1. (a) f est définie, continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

(b) D'après le tableau de variation de f, f admet un maximum global en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Donc :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) - x \leq 0.$$

(c) Voici les commandes pour tracer f :

```python
def f(x):
  return(np.log(1+x)-x)

x = np.linspace(0, 2, 100)
y = f(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité de l'énoncé pour $x = -\frac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \ &\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow\ \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0,$$

en utilisant la question précédente pour la dernière inégalité. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité de l'énoncé pour $x = \dfrac{1}{n+1} \in]-1,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\leq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\leq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \ln(n+2)-\ln(n+1)-\frac{1}{n+1}\leq 0\end{aligned}$$

En multipliant cette dernière inégalité par -1, on a bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)\geq 0.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1}-v_n=\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+2)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)\geq 0,$$

en utilisant la question précédente pour la dernière inégalité. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned}v_n-u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=-\ln(n+1)+\ln(n)\\ &= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right).\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$ donc, par continuité du logarithme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\ln(1)=0$.

(b) On a démontré que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante (question 1.(b)), que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante (question 2.(b)) et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=0$ (question 3.(a)). Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite ℓ.

(c) Voici le programme permettant d'obtenir une approximation de ℓ à 10^{-3} près :

```python
n = 1
S = 1
u = 1
v = 1 - np.log(2)
while np.abs(u-v) > 10**(-3) :
    n = n+1
    S = S + 1/n
    u = S - np.log(n)
    v = S - np.log(n+1)
print(u,v)
```

Exercice 14

1. Voici la procédure pour calculer S_n :

```
n = input('Donner n : ')
S = 0
for k in range(1,n+1):
  S = S + np.log(1+k/n**2)
print(S)
```

2. (a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1+x>0$). Pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. f est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

(b) La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ (la fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1+x>0$). Pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} + \frac{x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq g(0) = 0$. g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

- d'après la question 2.(a), $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1+x)$.
- d'après la question 2.(b), $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

On a ainsi, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $x = \dfrac{k}{n^2}$ dans les inégalités (1) et on obtient

$$\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\dfrac{k}{n^2}\right)^2}{2} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2},$$

soit

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

(b) On somme les inégalités (2) pour k allant de 1 à n et on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Or :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\displaystyle= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}.$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = S_n.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$

On en déduit l'encadrement demandé :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

4. (a) On a :

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

et

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n^3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Avec la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$. D'après le théorème d'encadrement avec les inégalités de la question 3.(b), on a donc que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(P_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = S_n$$

Ainsi $S_n = \ln(P_n)$ et donc $P_n = e^{S_n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^x = e^{1/2}$ (par continuité de la fonction exponentielle). Donc, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{1/2}$.

Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 15

1. f est définie si $1+x^2>0$ ce qui est toujours vrai. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et f est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Pas d'asymptote horizontale ou verticale.

   Enfin, $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. g est définie si $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ et g est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_g$.

   $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

   En $+\infty$, on a une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$ donc on factorise par le terme dominant :

$$\frac{e^{2x}}{x^2-1} = \frac{e^{2x}}{x^2} \times \frac{1}{1-1/x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   par croissances comparées. Deux asymptotes verticales d'équation $x=-1$ et $x=1$. Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=0$.

   Enfin, $g'(x) = \dfrac{2e^{2x}\times(x^2-1) - e^{2x}\times 2x}{(x^2-1)^2}$.

3. h est définie si $x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}^*$ et h est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_h$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$. Une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

   Enfin, $h'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) \exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

4. i est définie si $x^2 + 1 \geq 0$ ce qui est toujours vrai (on a même $x^2 + 1 > 0$). Donc $\mathscr{D}_i = \mathbb{R}$ et i est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_i$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$. En $-\infty$, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$ donc on multiplie par l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x^2+1} + x = (\sqrt{x^2+1} + x) \times \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Pas d'asymptote verticale. Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

   Enfin, $i'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1$.

5. j est définie si $\dfrac{2-x}{x+3} > 0$ et $x+3 \neq 0$. En faisant un tableau de signe, on obtient que $\mathscr{D}_j =]-3, 2[$ et j est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_j$.

   $\lim\limits_{x\to 2^-} j(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -3^+} j(x) = +\infty$. Deux asymptotes verticales d'équation $x = -3$ et $x = 2$. Pas d'asymptote horizontale.

   Enfin, $j'(x) = \dfrac{\dfrac{(-1)\times(x+3) - (2-x)\times 1}{(x+3)^2}}{\dfrac{2-x}{x+3}} = \dfrac{-5}{(x+3)^2} \times \dfrac{x+3}{2-x} = \dfrac{-5}{(x+3)(2-x)}$.

6. k est définie si $x^2 + x + 1 \geq 0$ et si $x^2 + x + 1 \neq 0$ ce qui est toujours vrai. Donc $\mathscr{D}_k = \mathbb{R}$ et k est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_k$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$. En $-\infty$, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$ donc on factorise par le terme dominant :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(1 + 1/x + 1/x^2\right)}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Pas d'asymptote verticale. Une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y = 0$.

   Enfin, comme $k(x) = (x^2+x+1)^{-1/2}$, $k'(x) = -\dfrac{1}{2}(2x+1)(x^2+x+1)^{-3/2} = \dfrac{-2x-1}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$.

7. l est définie si $x \geq 0$ et si $3 - \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 9 > x$. Donc $\mathscr{D}_l = [0, 9[$ et l est continue sur $[0, 9[$, dérivable sur $]0, 9[$ (d'après les propriétés des fonctions logarithme et racine carrée).

   $l(0) = \ln(3)$ (pas de limite ici car l est continue en 0) et $\lim\limits_{x\to 9^-} l(x) = -\infty$. Une asymptote verticale d'équation $x = 9$. Pas d'asymptote horizontale.

   Enfin, $l'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{3 - \sqrt{x}} = \dfrac{-1}{6\sqrt{x} - 2x} = \dfrac{1}{2x - 6\sqrt{x}}$.

8. $m(x) = x^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ est définie si $x > 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_m =]0, +\infty[$ et m est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_m$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} m(x) = 0$ par composition par exp.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = 1$ par composition par exp.

Pas d'asymptote verticale. Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$.
Enfin, $m'(x) = \left(\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}\right) \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

9. $n(x) = (3-x)^{\ln(x)} = e^{\ln(x)\ln(3-x)}$ est définie si $x > 0$ et $3 - x > 0$. Donc $\mathscr{D}_n =]0, 3[$ et n est continue et dérivable sur $\mathscr{D}_n$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(3-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} n(x) = 0$ par composition par exp.
$\lim\limits_{x\to 3^-} \ln(x)\ln(3-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 3^-} n(x) = 0$ par composition par exp.
Pas d'asymptote verticale ou horizontale.
Enfin, $n'(x) = \left(\dfrac{\ln(3-x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{3-x}\right) e^{\ln(x)\ln(3-x)}$.

Exercice 16

1. $f(x)$ est définie si $1+e^{1/x} \neq 0$ (toujours vraie) et $x \neq 0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. On distingue limite à gauche et à droite :

   - En 0^- : $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 + e^{1/x} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
   - En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + e^{1/x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ainsi prolongée,
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
   est définie et continue en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$).

3. Pour tout $x \neq 0$,
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{1+e^{1/x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+e^{1/x}}.$$
   On distingue limite à gauche et à droite :

   - En 0^- : $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 + e^{1/x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$. Ainsi, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$.
   - En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 + e^{1/x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

   Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 17

1. $f(x)$ est définie si $x > 0$ et $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (en composant par exp qui est croissante).
   Donc f est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]1, +\infty[$. On a alors :
   $$f'(x) = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1 \times \ln(x) + x \times 1/x}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}.$$
   Pour tout $x > 1$, $f''(x) < 0$. Donc f est concave sur $]1, +\infty[$.

2. Comme f est concave sur $]1,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est toujours au dessus de ses cordes :

$$\forall x,y \in]1,+\infty[,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

En prenant $\lambda = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\ln(\ln(\frac{1}{2}x + (1-\frac{1}{2}y)) \geq \frac{1}{2}\ln(\ln(x)) + (1-\frac{1}{2})\ln(\ln(y)).$$

Après simplification et en utilisant les propriétés du ln pour le membre de droite, on a :

$$\ln(\ln(\frac{x+y}{2})) \geq \ln(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}).$$

En composant par exp qui est croissante, on obtient finalement : $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Ainsi, pour tout $x,y \in]1,+\infty[$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Exercice 18

1. (a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$g'(x) = (-1)\times e^x + (1-x)e^x = -xe^x.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(b) Pour tout $x \in]-\infty,0]$, $g(x) > 1$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty,0]$.
Sur $[0,+\infty[$, g est continue et strictement décroissante à valeurs dans $]-\infty,2]$. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $]-\infty,2]$. Comme $0 \in]-\infty,2]$, 0 admet un unique antécédent par g noté α. Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0,+\infty[$.
On a ainsi montré que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

(c) $g(1) = 1 \geq 0$ et $g(2) = -e^2 + 1 \leq 0$. Donc $g(1) \geq g(\alpha) \geq g(2)$ et, comme g est décroissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $1 \leq \alpha \leq 2$.

2. (a) $f(x)$ est définie si $e^x + 1 \neq 0$. Or, pour tout réel x, $e^x + 1 > 1 > 0$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1\times(e^x+1) - x\times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

(b) On déduit du tableau de variation de g et de la question 1.(b) le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(c) $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{\alpha}-1=0 \Leftrightarrow e^{\alpha}=\dfrac{-1}{1-\alpha}$. On en déduit alors :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha}{\dfrac{-1}{1-\alpha}+1}=\frac{\alpha}{\dfrac{-\alpha}{1-\alpha}}=\alpha\times\frac{1-\alpha}{-\alpha}=\alpha-1.$$

3. (a) L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0 est :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=\frac{g(0)}{(e^0+1)^2}x+0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{4}x \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x.$$

(b) On pose $h(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x$. Alors :

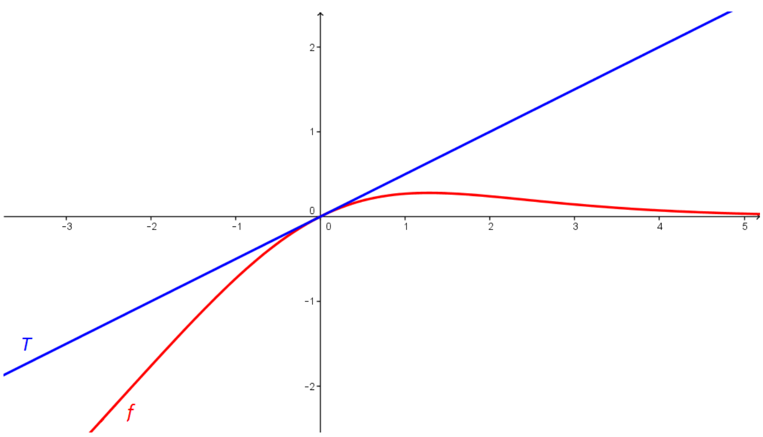
$$h(x)=\frac{x}{e^x+1}-\frac{1}{2}x=\frac{2x-x(e^x+1)}{2(e^x+1)}=\frac{x-xe^x}{2(e^x+1)}=\frac{x(1-e^x)}{2(e^x+1)}.$$

On obtient alors le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
$2(e^x+1)$			$+$		
$h(x)$		$-$	0	$-$	

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est toujours en dessous de T et elles se coupent uniquement en 0.

4. On obtient alors le tracé suivant :



Exercice 19

1. (a) f est définie sur $1+e^x \neq 0$ ce qui est toujours vraie. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x = \frac{(1+x)-x(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{1-xe^x}{1+e^x}.$$
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-xe^x}{1+e^x} = 1.$
   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $-\infty$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1} = -\infty.$

   (c) On a :
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1-xe^x}{x+xe^x} = \frac{\frac{1}{xe^x}-1}{e^{-x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$
   Donc $a=-1$. De plus :
$$f(x)-ax = \frac{1+x}{1+e^x} - x + x = \frac{1+x}{1+e^x} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1/x+1}{e^{-x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   par croissances comparées. Donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y=-x$.

2. (a) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opération sur des fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :
$$f'(x) = \frac{1\times(1+e^x)-(1+x)\times e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{1-xe^x-(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{-xe^x-2e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2}.$$

   (b) On déduit des questions précédentes le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

   Comme f est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty, 1/2]$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty, 1/2]$ par le théorème de la bijection.
   $0 \in]-\infty, 1/2]$ donc il existe un unique antécédent x_0 de 0 par f dans $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, l'équation $\frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow f(x)=0$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(x_0) = 0$ (par définition de x_0) et $f(1) = \frac{2}{1+e} - 1 = \frac{1-e}{1+e}$. Donc $f(0) > f(x_0) > f(1)$.
   Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $0 < x_0 < 1$.

Exercice 20

1. (a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g'(x) = e^x + 2 > 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(b) $g(0) = 0$ et d'après le tableau de variation de g, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) $f(x)$ est définie si $e^x + 2x - 1 > 0$, c'est-à-dire si $g(x) > 0$. D'après la question 1.(b), f est donc définie sur $]0, +\infty[$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 2x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to0^+} (e^x + 2x - 1) = 0^+$ (avec la question 1.(c)) et $\lim\limits_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(c) f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 2x - 1} = \dfrac{e^x + 2}{g(x)}$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^x + 2 > 0$ et $g(x) > 0$ (toujours d'après la question 1.(c)). On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$		$+\infty$

(d) f est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (c'est l'unique antécédent de 0 par f).
Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

(e) $f(\frac{1}{4}) = \ln(e^{1/4} + 2 \times \frac{1}{4} - 1) = \ln(e^{1/4} - \frac{1}{2})$. Comme $e^{1/4} \simeq 1.28$, $e^{1/4} - \frac{1}{2} \simeq 0.78$. En particulier, $e^{1/4} - \frac{1}{2} \in]0, 1[$, donc $f(\frac{1}{4}) = \ln(e^{1/4} - \frac{1}{2}) < 0$.
$f(\frac{1}{2}) = \ln(e^{1/2} + 2 \times \frac{1}{2} - 1) = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2} > 0$.

Ainsi, $f(\frac{1}{4}) < f(\alpha) < f(\frac{1}{2})$. Comme f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

3. (a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln(e^x+2x-1)}{x} = \frac{\ln(e^x(1+2xe^{-x}-e^{-x}))}{x} = \frac{\ln(e^x)+\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})}{x} \\ &= \frac{x+\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})}{x} = 1+\frac{\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})}{x}.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2xe^{-x}-e^{-x}) = 1$ par croissance comparée, et $\lim\limits_{X\to 1}\ln(X) = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x}) = 0$.

Par quotient des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ et donc $a = 1$.

(b) En reprenant le calcul précédent, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x)-x = \ln(e^x+2x-1)-x = x+\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})-x = \ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})$$

On a démontré à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x}) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

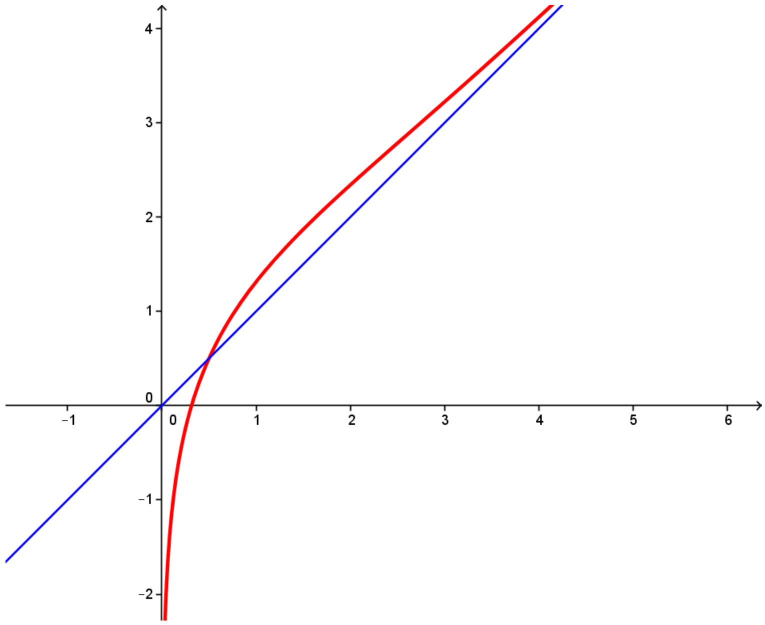
(c) On étudie le signe de $f(x)-x$:

$$\begin{aligned}f(x)-x \geq 0 &\Leftrightarrow \ln(1+2xe^{-x}-e^{-x}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exp(\ln(1+2xe^{-x}-e^{-x})) \geq \exp(0) \\ &\Leftrightarrow 1+2xe^{-x}-e^{-x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-x}(2x-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

en utilisant que la fonction exponentielle est croissante à la deuxième équivalence et que, pour tout x, $e^{-x} > 0$ à la cinquième.

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ sur $[\frac{1}{2},+\infty[$ et en dessous de Δ sur $]0,\frac{1}{2}]$ ($\mathscr{C}_f$ et Δ se coupent en $\frac{1}{2}$).

4. Voici le tracé de $\mathscr{C}_f$ et de Δ :



Exercice 21

1. $f(x)$ est définie si $x > 0$ et si $x^2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

   f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. (a) $P(1) = 3 - 1 - 2 = 0$ donc 1 est racine de P et P se factorise par $(x-1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

   Alors $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$ si et seulement si, par identification,

   $$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & -1 \\ -c & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & 3 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

   Donc $P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$.
   On cherche ensuite à factoriser $3x^2+3x+2$. Comme son discriminant est $\Delta = 9 - 24 = -16 < 0$, $3x^2+3x+2$ ne se factorise pas.
   Ainsi, la forme factorisée de P est $P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$.

   (b) On a alors:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+3x+2$			$+$		
$P(x)$		$-$	0	$+$	

   (c) g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

   $$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{P(x)}{x}.$$

   On dresse le tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

(d) D'après le tableau de variation de g, g admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint en 1 et égal à $g(1) = 3$. Donc, pour tout $x > 0$, $g(x) \geq g(1) = 3 > 0$.

3. (a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{(1 + \frac{1}{x}) \times x^2 - (x - 1 + \ln(x)) \times 2x}{x^4} = 1 + \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= 1 + \frac{-x + 3 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) On en déduit les variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Pour les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$:

- En 0^+ : par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
- En $+\infty$: $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées.

(c) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc 0 admet un unique antécédent $\alpha \in]0, +\infty[$ par f. Calculons $f(\frac{1}{2})$ et $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{\frac{1}{2} - 1 + \ln(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2} + 2 - 4 - 4\ln(2) = -\frac{1}{2} - 4\ln(2) < 0, \\ f(1) &= 1 + 1 + \frac{1 - 1 + \ln(1)}{1^2} = 2 > 0. \end{aligned}$$

Comme f est croissante sur $]0, +\infty[$, on a donc $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. (a) On a :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées).}$$

(b) h est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x>0$,

$$h'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}.$$

On dresse le tableau de variation de h :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$
$h(x)$	$\|\|$	$\nearrow$

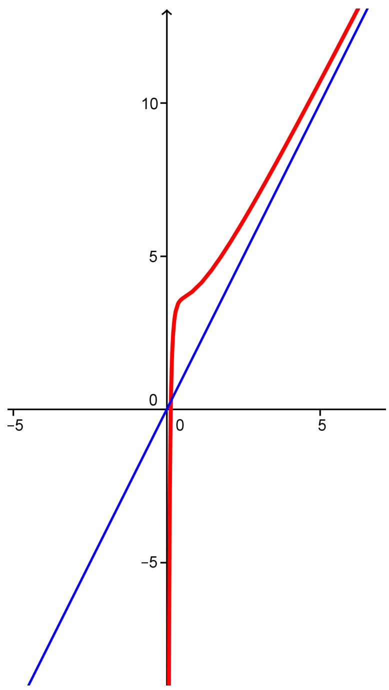
(c) $h(1)=0$ donc, d'après les variations de h, $h(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0,1]$ et $h(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1,+\infty[$.

(d) Pour tout $x>0$,

$$f(x)-(x+1)=\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}.$$

Donc, d'après la question précédente, $f(x)-(x+1)\leq 0$ pour tout $x\in]0,1]$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]0,1]$) et $f(x)-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in[1,+\infty[$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ sur $[1,+\infty[$).

5. Voici l'allure de $\mathcal{C}_f$ et de Δ :



Exercice 22

1. (a) f est définie, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ car c'est le quotient de $x\mapsto x$ et de $x\mapsto (x+1)^2$ qui sont deux fonctions définies, continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x\in[0,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{1\times(x+1)^2-x\times 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)((x+1)-2x)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)^4}=\frac{1-x}{(1+x)^3}.$$

(b) Pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+2+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

(c) On en déduit le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2. (a) $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{4}$.

$$u_2 = f(u_1) = f(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4}+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{5}{4})^2} = \frac{1}{4} \times \frac{16}{25} = \frac{4}{25}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n}+1)^2} = \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{n+1}{n})^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}.$$

On a donc

$$f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} \leq 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $u_1 = \frac{1}{4}$ (question 2.(a)) et $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{1} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, on a $0 < u_n < \frac{1}{n}$. Comme f est strictement croissante sur $[0, 1]$ (question 1.(c)), on a en composant par f : $f(0) < f(u_n) < f(\frac{1}{n})$. Or $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$ (question 2.(b)). Donc $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$.

(d) D'après la question précédente, $0 < u_n < \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Remarquons que v_n est bien définie car, d'après la question 2.(c), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et que $u_0 = 1 > 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{f(u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{(u_n+1)^2}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2-1}{u_n} \\ &= \frac{u_n^2+2u_n+1-1}{u_n} = \frac{u_n^2+2u_n}{u_n} = \frac{u_n(u_n+2)}{u_n} = u_n+2. \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) + \left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{u_n} - 4. \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - 4, \text{ donc } \frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^{n-1} v_k + 4.$$

Or, d'après la question 3.(a), $v_n = u_n + 2$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1}(u_k+2) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \sum_{k=1}^{n-1} 2 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + 2((n-1)-1+1) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + 2(n-1).$$

On a donc démontré que, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + 2(n-1) + 4 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + 2(n+1).$$

(d) Soit $n \geq 2$. D'après la question 3.(c), pour tout $k \geq 1$, $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k}$. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient $0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. En ajoutant $2(n+1)$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$2(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} u_k + 2(n+1) = \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

4. (a) On pose $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie, continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après le tableau de variation de g, g admet un maximum global en 0 qui vaut $g(0) = 0$. Donc :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x.$$

(b) Soit $k \geq 2$. En posant $x = -\dfrac{1}{k} \in]-1,+\infty[$, on obtient, avec la question précédente :

$$\ln(1-\frac{1}{k}) \leq -\frac{1}{k} \ \Leftrightarrow\ \ln(\frac{k-1}{k}) \leq -\frac{1}{k} \ \Leftrightarrow\ \ln(k-1) - \ln(k) \leq -\frac{1}{k}.$$

(c) Soit $n \geq 3$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 2 à $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=2}^{n-1} (\ln(k-1) - \ln(k)) \\ &= (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \ldots + (\ln(n-2) - \ln(n-1)) \\ &= -\ln(n-1). \end{aligned}$$

Donc en multipliant par -1, on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1)$. En ajoutant 1, on a finalement :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1).$$

5. Soit $n \geq 3$. En utilisant la question 3.(d) et la question 4.(c), on a :

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 2(n+1) + 1 + \ln(n-1).$$

En divisant par n, on obtient :

$$\frac{2(n+1)}{n} \leq \frac{1}{nu_n} \leq \frac{2(n+1)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n}.$$

Or :

- $\dfrac{2(n+1)}{n} = 2 + \dfrac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$
- $\dfrac{\ln(n-1)}{n} = \dfrac{\ln(n(1-\frac{1}{n}))}{n} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1-\frac{1}{n})}{n} = \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(1-\frac{1}{n})}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée).

Donc, par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$ et, par passage à l'inverse, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$.
