Correction du TD 1

Compléments sur les suites

Correction de l'exercice 15

1. (a) On considère la fonction $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ (c'est une fonction polynomiale de degré 2 de discriminant strictement négatif). Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Comme g est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit par le théorème de la bijection que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Et $0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique antécédent $\alpha \in \mathbb{R}$ par g. Autrement dit, l'équation $(E) \Leftrightarrow g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) On a :

$$g(\frac{1}{3}) = -\frac{14}{27} < 0, \quad g(\alpha) = 0, \quad g(1) = 2.$$

Donc $g(\frac{1}{3}) \leq g(\alpha) \leq g(1)$. Comme g est croissante sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$.

2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ (définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + x + 1$ est toujours non nul).

(a) Remarquons que, pour tout réel x :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + x + 1} = x \Leftrightarrow 1 = x(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Ainsi, les équations (E) et $f(x) = x$ sont équivalentes. Comme α est l'unique solution de (E) sur $]0, 1[$, c'est aussi l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, 1[$.

(b) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Comme $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1/3, 1]$, f est décroissante sur $[1/3, 1]$. On a donc :

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) \geq f(x) \geq f(1) \Rightarrow \frac{9}{13} \geq f(x) \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1.$$

On a donc bien que, si x appartient à $[1/3, 1]$, alors $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.

(c) f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais donc elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, on peut la dériver une deuxième fois. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+x+1)^2 - 2(2x+1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^4} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}.$$

Comme $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1/3, 1]$, f est croissante sur $[1/3, 1]$. On a donc :

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(\frac{1}{3}) \leq f'(x) \leq f'(1) \Rightarrow -\frac{135}{169} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{3}.$$

Comme la fonction valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a pour tout $x \in [1/3, 1]$:

$$-\frac{135}{169} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{135}{169} \geq |f'(x)| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{135}{169}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{135}{169}$.

3. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$u_n \in [1/3, 1]$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $u_0 = 1 \in [1/3, 1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [1/3, 1]$.
On a donc, avec la question 2.(b), $u_{n+1} = f(u_n) \in [1/3, 1]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/3, 1]$.

(b) f est continue et dérivable sur $[1/3, 1]$ et $\forall x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{135}{169}$ (question 2.(c)).
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall a, b \in [1/3, 1], \quad |f(b) - f(a)| \leq \frac{135}{169}|b - a|.$$

On pose $a = \alpha \in [1/3, 1]$ (d'après la question 1.(b)) et $b = u_n \in [1/3, 1]$ (d'après la question 3.(a)). Comme $f(\alpha) = \alpha$ (d'après la question 2.(a)) et $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{135}{169}|u_n - \alpha|.$$

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "$|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$".
Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha|$.
Comme $\alpha \in [1/3, 1]$ (question 1.(b)), $|1 - \alpha| \leq \dfrac{2}{3} \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$.
En multipliant par $\dfrac{135}{169} > 0$, on a : $\dfrac{135}{169}|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^{n+1}$.
Or, d'après la question précédente, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{135}{169}|u_n - \alpha|$. Donc :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{135}{169}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$.

(d) Avec la question précédente, $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$.

Comme $-1 < \dfrac{135}{169} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{135}{169}\right)^n = 0$.

Par encadrement, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Correction de l'exercice 22

1. (a) La fonction f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout réel x, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 2$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(b) La fonction f_n est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[-2, +\infty[$. Par le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-2, +\infty[$. Comme $0 \in [-2, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ (qui est l'unique antécédent de 0 par f_n dans $\mathbb{R}_+$). On note α_n ce réel.

2. Pour obtenir α_1, on résout l'équation $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. Donc $\alpha_1 = \dfrac{2}{3}$.

   Pour obtenir α_2, on résout l'équation $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 12 > 0$ et les racines sont $-1 + \sqrt{3}$ et $-1 - \sqrt{3}$. Donc $\alpha_2 = -1 + \sqrt{3}$ (puisque $-1 - \sqrt{3} < 0$).

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = -2$, $f_n(1) = 1^n + 2 \times 1 - 2 = 1$ et par définition $f_n(\alpha_n) = 0$. Donc $f_n(0) \leq f_n(\alpha_n) \leq f_n(1)$. Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $0 \leq \alpha_n \leq 1$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in [0, 1]$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Pour tout $x \in [0, 1]$,
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 2x - 2 - (x^n + 2x - 2) = x^{n+1} - x^n = \underbrace{x^n}_{\geq 0} \underbrace{(x-1)}_{\leq 0} \leq 0.$$

   (b) D'après la question 3, $\alpha_{n+1} \in [0, 1]$. Donc prenant $x = \alpha_{n+1}$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_n(\alpha_{n+1}) \leq 0$.
   Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ par définition de α_{n+1}. On a alors $-f_n(\alpha_{n+1}) \leq 0$ donc $f_n(\alpha_{n+1}) \geq 0$.
   Par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$. Avec la question précédente, on a donc : $f_n(\alpha_{n+1}) \geq f_n(\alpha_n)$.
   Comme f_n est croissante (question 1.(a)), on en déduit que $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$.
   La suite (α_n) est donc croissante.

5. La suite (α_n) est croissante (question 4.(c)) et majorée par 1 (question 3.) donc, d'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite ℓ.

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$, on en déduire par passage à la limite que $\ell \in [0, 1]$.

6. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_n) = 0$. Or :
$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_n)^n + 2\alpha_n - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_n = 2 - (\alpha_n)^n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2 - (\alpha_n)^n}{2}.$$

7. On suppose que ℓ est différente de 1, donc avec la question 5., $\ell \in [0, 1[$.

   (a) On sait déjà (question 3.) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geq 0$.
   De plus, (α_n) est une suite croissante (question 4.(c)) et qui converge vers une limite ℓ. La suite est donc majorée par sa limite et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \leq \ell$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \alpha_n \leq \ell$.

   (b) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \alpha_n \leq \ell$ et donc, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leq \alpha_n^n \leq \ell^n$. Comme $0 \leq \ell < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$. On en conclut, d'après le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

   (c) D'après la question 6., $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{2 - (\alpha_n)^n}{2}$. En passant à la limite dans cette égalité, on obtient $\ell = \dfrac{2 - 0}{2} \Leftrightarrow \ell = 1$, ce qui est en contradiction avec notre supposition ($\ell \neq 1$).
   Notre supposition était donc fausse et on en conclut que $\ell = 1$.