Correction - TD 12

Variables aléatoires à densité

Correction de l'exercice 10 (EDHEC 1996)

1. (a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $1+e^x>0$) et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\frac{1}{1+e^x}e^x = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}.$$

(b) Pour tout réel x,

$$1 - f'(x) - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} - f'(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) = f(x).$$

(c) On déduit de la question précédente que $F(x) = x - f(x) - \ln(1+e^x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\int_0^M f(x)\,dx = M - f(M) - \ln\left(1+e^M\right) + 2\ln(2)$$

avec $f(M) \to 0$ et $M - \ln\left(1+e^M\right) = -\ln\left(1+e^{-M}\right) \to 0$ donc

$$\int_0^M f(x)\,dx \underset{M\to+\infty}{\to} 2\ln(2)$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et vaut $2\ln(2)$.

2. (a) Prenons $\alpha = \dfrac{1}{2\ln(2)} \geq 0$. On a alors que :

- g continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
- g est positive sur $\mathbb{R}$. En effet, c'est le cas sur $\mathbb{R}_-^*$ (elle est nulle) et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$1+e^x \geq 1 \Rightarrow \ln(1+e^x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow \alpha f(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0,$$

  par croissance du logarithme.
- Enfin,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{+\infty} \alpha f(x)dx = \alpha\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Ainsi, g peut être considérée comme une densité de probabilité.

(b) On cherche à appliquer le théorème de transfert. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} Odx + \int_0^{+\infty} \alpha\ln(1+e^x)dx = \alpha\int_0^{+\infty}\ln(1+e^x)dx.$$

Or :

$$\ln(1+e^x) = \ln(e^x(1+e^{-x})) = x + \ln(1+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} x.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} xdx$ diverge (car par exemple c'est une Riemann de paramètre $-1 \leq 1$).

Par comparaisons d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x g(x)dx$ diverge et Y n'admet pas d'espérance.

Correction de l'exercice 12 (EML)

1. La fonction $x \to \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

   Si $M \geq 2$,
   $$\int_2^M \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_2^M x^{-3/2}dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_2^M = -2M^{-1/2} + 2^{1/2} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$$
   Donc l'intégrale est convergente et vaut $\sqrt{2}$.

2. f est positive ou nulle. Elle est continue sauf peut-être en 0. Enfin, en utilisant la question précédente :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}}dx = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1.$$
   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1. Finalement, f est bien une densité de probabilité.

3. (a) La fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Elle vaut donc :
   - si $x \leq 2$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$
   - si $x \geq 2$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} 0dt + \int_2^x \frac{1}{t\sqrt{2t}}dt = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}t^{-1/2}\right]_2^x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{x}}.$

   (b) X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge absolument.

   Or pour $x \geq 2$: $xf(x) = \dfrac{x}{x\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale (de Riemann) diverge en $+\infty$.
   Donc X n'a pas d'espérance.

4. (a) G est définie par $G(x) = P(U \leq x) = 1 - P(U > x)$
   Et comme T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes,
   $$P(U > x) = P(T_1 > x) \cdot P(T_2 > x) \cdot P(T_3 > x) = (1 - F(x))^3$$
   et finalement : $G(x) = 1 - (1 - F(x))^3$.
   A l'aide de la question 2.(a), on obtient finalement :
   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 - \left(\dfrac{2}{x}\right)^{3/2} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

   (b) On remarque que la fonction de répartition G de U est :
   - continue sur $\mathbb{R}$: en effet, elle est continue sur $]-\infty; 2[$ (fonction nulle), sur $]2; +\infty[$ (par opération sur les fonctions continues) et en 2 (car $\lim\limits_{x\to2^-} G(x) = \lim\limits_{x\to2^+} G(x) = G(2) = 0$).
   - de classe C^1 sauf peut-être en 2 : en effet, G est de classe C^1 sur $]-\infty; 2[$ (fonction nulle) et sur $]2; +\infty[$ (par opération sur les fonctions de classe C^1).

Donc U est une variable aléatoire à densité.
Comme $G'(x) = 0$ si $x < 2$ et $G'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2}{x^2} \times \left(\dfrac{2}{x}\right)^{1/2} \dfrac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}}$ si $x > 2$, on a finalement, en donnant une valeur arbitraire positive en 2, que U a pour densité :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(c) On étudie la convergence absolue de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx$ impropre en $\pm\infty$:

- En $-\infty$, elle converge (intégrale de la fonction nulle).
- En $+\infty$,

$$\begin{aligned} \int_2^M xg(x)\,dx &= \int_2^M x\frac{3\sqrt{2}}{x^2\sqrt{x}}dx = 3\sqrt{2}\int_2^M \frac{1}{x^{3/2}}dx = 3\sqrt{2}\left[-2\frac{1}{x^{1/2}}\right]_2^M \\ &= -6\sqrt{2}\frac{1}{M^{1/2}} + 6\sqrt{2}\frac{1}{2^{1/2}} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 6 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx$ converge absolument et U admet une espérance $E(U) = 6$.

5. (a) La fonction de répartition H de V est définie par $H(x) = P(V \leq x)$.
Et comme T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes,

$$H(x) = P(T_1 \leq x)\,P(T_2 \leq x)\,P(T_3 \leq x) = F(x)^3.$$

A l'aide de la question 2.(a), on obtient finalement :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)^3 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

(b) On remarque que la fonction de répartition H de V est :

- continue sur $\mathbb{R}$: en effet, elle est continue sur $]-\infty; 2[$ (fonction nulle), sur $]2; +\infty[$ (par opération sur les fonctions continues) et en 2 (car $\lim\limits_{x\to2^-} H(x) = \lim\limits_{x\to2^+} H(x) = H(2) = 0$).
- de classe C^1 sauf peut-être en 2 : en effet, H est de classe C^1 sur $]-\infty; 2[$ (fonction nulle) et sur $]2; +\infty[$ (par opération sur les fonctions de classe C^1).

Donc V est une variable aléatoire à densité.
Comme $H'(x) = 0$ si $x < 2$ et $H'(x) = 3\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}$ si $x > 2$, on a finalement, en donnant une valeur arbitraire positive en 2, que V a pour densité :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 3\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

(c) On étudie la convergence absolue de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,dx$ impropre en $\pm\infty$:

- En $-\infty$, elle converge (fonction nulle).

- En $+\infty$,

$$\int_2^M xh(x)\,dx = \int_2^M 3x\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x\sqrt{2x}}dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\int_2^M \left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \frac{1}{x^{1/2}}dx$$

  Et comme $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}^2\right)\frac{1}{x^{1/2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$ dont l'intégrale diverge en $+\infty$, par comparaison d'intégrales à termes positifs, l'intégrale de $xh(x)$ diverge également et V n'a pas d'espérance.