Correction du TD 2

Calcul matriciel

Correction de l'exercice 23 - EDHEC 99

1. (a) On a $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule la réduite associée à la matrice $A(0) - \lambda I_4$:

$$\begin{aligned}
(A(0)-\lambda I) \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\lambda \in Sp(A(0)) \Leftrightarrow (A(0)-\lambda I) \text{ non inversible} \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Donc 1 et -1 sont les seuls valeurs propres de $A(0)$.

(b) • Si $\lambda = -1$, alors

$$(A(0)+I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0t = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(A(0)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On obtient une base de $E_{-1}(A(0))$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice.

• Si $\lambda = 1$, alors

$$(A(0)-I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Donc $E_1(A(0)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On obtient une base de $E_1(A(0))$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice.

Par concaténation de familles libres des sous-espaces $E_{-1}(A(0))$ et $E_1(A(0))$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Ce n'est pas une base car le cardinale de la famille est 2 et la dimension de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est 4. On a donc pas de base de vecteurs propres de $A(0)$ et elle n'est donc pas diagonalisable.

2. On calcule la réduite associée à la matrice $(A(a) - \lambda I)$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & 0 & 1 \\ a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & a-2+\frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{a} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & -a-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda(a+\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - \frac{1-\lambda}{a} L_2 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \\ L_3 - (a+\lambda) L_4 \to L_4 \\ L_4 \to L_3 \end{matrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A(a)) &\Leftrightarrow (A(a) - \lambda I) \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow a-2+\frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad 1+\lambda(a+\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $A(a)$ sont donc les réels λ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

3. (a) $A(a)$ n'est pas inversible si et seulement si 0 est valeur propre. Avec la question précédente, cela équivaut à $0 = (a-1)^2$ ou $1 = 0$ (impossible) et donc $a = 1$.
   Ainsi, $A(a)$ est non inversible si et seulement si $a = 1$.

   (b) Si $a = 1$, les valeurs propres sont $\lambda = 0$ et les solutions de $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Or cette équation n'admet pas de solution (car $\Delta = 1 - 4 < 0$). Donc la seule valeur propre de $A(1)$ est 0.

   Si $A(1)$ était diagonalisable, on aurait $A = P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}$ avec D diagonale. Comme $Sp(A(1)) = \{0\}$, $D = 0$ et donc $A(1) = 0$ ce qui n'est pas le cas. Ainsi, $A(1)$ n'est pas diagonalisable.

4. (a) Avec la première équation de Q2, on sait que $a-1$ et $1-a$ sont valeurs propres de $A(a)$. Elles ne sont pas solutions de la deuxième équation de Q2 car :
   - $(a-1)^2 + a(a-1) + 1 = 2a^2 - 3a + 2$: $\Delta = 9 - 16 < 0$ donc non nul pour tout $a \in \mathbb{R}$;
   - $(1-a)^2 + a(1-a) + 1 = -a + 2 < 0$.

   D'autre part, toujours avec la deuxième équation de Q2, $\frac{-a\pm\sqrt{a-4}}{2}$ sont valeurs propres (car $\Delta = a - 4 > 0$).
   Donc $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.

   (b) Pour chaque valeur propre de $A(a)$, on peut associer un vecteur propre (donc un vecteur non nul). On a donc une famille libre constitué d'un vecteur pour chacun des 4 sous-espace propres. Par concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, on obtient une famille libre de 4 vecteurs de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Comme le cardinale de cette famille est égal à la dimension de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, c'est donc une base de cet espace vectoriel. Donc $A(a)$ est diagonalisable.

Correction de l'exercice 25

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Par récurrence.

3. $A^3 - 2A^2 - A = -2I_3$ donc $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-1)(X+1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A.

4. Les racines de P (1, -1 et 2) sont les valeurs propres possibles de A. On vérifie que :

   - -1 est valeur propre de A car $A + I_3$ est non inversible ($L_2 = L_1 + L_3$) ;
   - 1 est valeur propre de A car $A - I_3$ est non inversible ($L_1 + L_2 = -L_3$) ;
   - 2 est valeur propre de A car $A - 2I_3$ est non inversible ($C_1 = C_3$).

   Donc $Sp(A) = \{-1, 1, 2\}$.

5. On déterminer les sous-espaces propres de A :

   - Pour $E_{-1}(A)$:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 2z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ y + 3z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2z \\ y = -3z \end{array}\right.$$

   Donc $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   - Pour $E_1(A)$:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x - 2z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z \\ y = -z \end{array}\right.$$

   Donc $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   - Pour $E_2(A)$:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x - 2z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array}\right.$$

   Donc $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   On obtient dans les trois cas une base du sous-espace propre car c'est une famille génératrice et libre (un vecteur non nul). Par concaténation des bases des trois sous-espaces propres $E_{-1}(A)$, $E_1(A)$, $E_2(A)$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est donc une base de cet espace vectoriel. Donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec :

   $$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. On montre par récurrence que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Après calculs, on a :

   $$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n+6-2^{n+1} & 2(-1)^{n+1}+6-2^{n+2} & 2(-1)^n+6-2^{n+3} \\ 3(-1)^{n+1}+3 & 3(-1)^n+3 & 3(-1)^{n+1}+3 \\ (-1)^n-3+2^{n+1} & (-1)^{n+1}-3+2^{n+2} & (-1)^n-3+2^{n+3} \end{pmatrix}$$

7. D'après la question 2, $X_n = X_0A^n$ donc :

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n+6-2^{n+1} & 2(-1)^{n+1}+6-2^{n+2} & 2(-1)^n+6-2^{n+3} \\ 3(-1)^{n+1}+3 & 3(-1)^n+3 & 3(-1)^{n+1}+3 \\ (-1)^n-3+2^{n+1} & (-1)^{n+1}-3+2^{n+2} & (-1)^n-3+2^{n+3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1}+39-7\times 2^{n+1} & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En identifiant les deux premiers coefficients, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}+39-7\times 2^{n+1}}{6}.$$

Correction de l'exercice 29

1. (a) λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_3$ est non inversible. Avec le pivot :

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda-2 \\ 0 & \lambda & -2+4\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3-(1-\lambda)L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda-4) \end{pmatrix} (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

On obtient une réduite triangulaire qui n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = 0, 1$ ou 4. Donc $Sp(A) = \{0, 1, 4\}$.

On détermine les sous-espaces propres :

- Pour $E_0(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 0 \\ -2z & = & 0 \\ -4z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-y \\ z=0 \end{array} \right.$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $E_1(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ -y-z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-z \\ y=-z \end{array} \right.$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $E_4(A)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -4y+2z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{array} \right.$$

Donc $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

(b) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
La famille (X_1, X_2, X_3) contient $3 = dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs.
Montrons que X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -a-b+c & = & 0 \\ a-b+c & = & 0 \\ b+2c & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -a-b+c & = & 0 & \\ -2b+2c & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ b+2c & = & 0 & \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -a-b+c & = & 0 & \\ -2b+2c & = & 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2) \\ 6c & = & 0 & \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants.
Ainsi, (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc A est diagonalisable.

(c) On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inversible (car X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants) et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ diagonale, de sorte que $A = PDP^{-1}$.

(d) Avec la méthode du pivot (calculs laissés au lecteur), on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. (a) On procède directement par équivalence :

$$\begin{aligned} M^2 = A \quad & \Leftrightarrow \quad PNP^{-1}PNP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ & \Leftrightarrow \quad P^{-1}PN^2P^{-1}P = P^{-1}PDP^{-1}P \Leftrightarrow N^2 = D. \end{aligned}$$

en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P inversibles à la troisième équivalence.

(b) Si $N^2 = D$, alors

$$ND = NN^2 = N^3 \quad \text{et} \quad DN = N^2N = N^3 \quad \text{donc} \quad ND = DN = N^3.$$

(c) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on résout $DN = ND$ ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 & 0 = b & c = 4c & \text{donc } b = c = 0. \\ d = 0 & e = e & f = 4f & \text{donc } d = f = 0. \\ 4g = 0 & 4h = h & 4i = 4i & \text{donc } g = h = 0. \end{cases}$$

On en déduit que si $N^2 = D$, alors $DN = ND$ donc $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est diagonale.

(d) Soit

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$N^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ e^2 = 1 \Leftrightarrow e = \pm 1 \\ i^2 = 4 \Leftrightarrow i = \pm 2 \end{cases}$$

On obtient 4 solutions :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que, pour tout $1 \leq i \leq 4$, $N_i^2 = D$.

(e) Avec les questions précédentes,

$$M^2 = A \Leftrightarrow \exists i \in [\![1, 4]\!], \ P^{-1}MP = N_i \Leftrightarrow \exists i \in [\![1, 4]\!], \ M = PN_iP^{-1}.$$

Il y a donc quatre solutions $M_i = PN_iP^{-1}$ vérifiant $M^2 = A$:

$$M_1 = PN_1P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = PN_2P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = PN_3P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = PN_4P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$