Correction du TD 4

Compléments sur les séries réelles

Correction de l'exercice 2 - ECRICOME 2004

1. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in Sp(B) &\Leftrightarrow B-\lambda I_2 \text{ non inversible} \Leftrightarrow det(B-\lambda I_2)=0\\ &\Leftrightarrow -\lambda(3-\lambda)+2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } 2.\end{aligned}$$

Donc $Sp(B)=\{1,2\}$.

Après calcul, on obtient $E_1(B)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ et $E_2(B)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$. On a bien deux bases de $E_1(B)$ et $E_2(B)$ car génératrice et libre (un vecteur non nul dans chaque cas). Par concaténation des bases de $E_1(B)$ et $E_2(B)$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de cet espace vectoriel. Donc B est diagonalisable et $B=PDP^{-1}$ avec :

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$B^n=PD^nP^{-1}$.

<u>Initialisation</u> : $B^0=I_2$ et $PD^0P^{-1}=PI_2P^{-1}=PP^{-1}=I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$B^{n+1}=B^nB \underset{\mathcal{P}(n)}{=} PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_2}DP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $B^n=PD^nP^{-1}$.

Comme D est diagonale $D^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$. Donc :

$$B^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&1-2^n\\2^{n+1}-2&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

3. Par définition de l'addition des matrices, le coefficient $1,1$ de $E_n(t)$ est la somme des coefficients $1,1$ de $\frac{t^k}{k!}B^k$, qui est $\frac{t^k}{k!}(2-2^k)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n(t)=\sum_{k=0}^n\frac{t^k}{k!}(2-2^k)=\sum_{k=0}^n\frac{2t^k-2^kt^k}{k!}=\sum_{k=0}^n\frac{2t^k-(2t)^k}{k!}.$$

De même, $\forall n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}b_n(t)&=\sum_{k=0}^n\frac{t^k}{k!}(1-2^k)=\sum_{k=0}^n\frac{t^k-(2t)^k}{k!},\\ c_n(t)&=\sum_{k=0}^n\frac{t^k}{k!}(2^{k+1}-2)=\sum_{k=0}^n\frac{2(2t)^k-2t^k}{k!},\\ d_n(t)&=\sum_{k=0}^n\frac{t^k}{k!}(2^{k+1}-1)=\sum_{k=0}^n\frac{2(2t)^k-t^k}{k!}.\end{aligned}$$

4. Rappelons que, pour tout réel x, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme est e^x, c'est-à-dire, la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x. On a donc :

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} e^t - e^{2t}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} e^t - e^{2t} \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} 2e^{2t} - 2e^t \\ d_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} 2e^{2t} - e^t. \end{aligned}$$

5. (a) On a :

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On remarque que $E_1^2 = E_1,\ E_2^2 = E_2,\ E_1E_2 = 0,\ E_2E_1 = 0$. Donc, pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E(t)E(-t) &= (e^tE_1 + e^{2t}E_2)(e^{t'}E_1 + e^{2t'}E_2) \\ &= e^{t+t'}E_1^2 + e^{t+2t'}E_1E_2 + e^{2t+t'}E_2E_1 + e^{2t+2t'}E_2^2 \\ &= e^{t+t'}E_1 + e^{2(t+t')}E_2 \\ &= E(t+t'). \end{aligned}$$

(c) En utilisant la question précédente, on obtient :

$$E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I_2.$$

La matrice $E(t)$ est donc inversible et son inverse est $E(-t)$.

Remarque. On pourrait également montrer que :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(E(t))^n = E(nt)$ (à faire par récurrence).
- La formule précédente est encore vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, elle est vraie si $n \geq 0$. Et pour $n \leq 0$,

$$(E(t))^n = (E(t)^{-1})^{-n} \underset{\text{Q.5.(b)}}{=} (E(-t))^{-n} \underset{\text{rec. préc.}}{=} E((-t)(-n)) = E(nt).$$

Correction de l'exercice 17

1. On remarque que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ car $\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ converge.

2. Prenons $\varepsilon = \frac{\alpha+1}{2}$ de sorte que $\alpha < \varepsilon < 1$.

On remarque que $\frac{1}{n^\epsilon} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}\right)$ car $\frac{\frac{1}{n^\epsilon}}{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)}} = \frac{\ln(n)}{n^{\varepsilon-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée car $\varepsilon - \alpha > 0$.
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\epsilon}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\varepsilon < 1$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ diverge.

3. (a) Soit $k \geq 2$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$, on a :

$$k \leq t \leq k+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k\ln(k)} \geq \frac{1}{t\ln(t)} \geq \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}.$$

On intégrant pour t allant de k à $k+1$ (bornes croissantes), on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}dt.$$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}dt = \frac{1}{k\ln(k)} \int_k^{k+1} 1dt = \frac{1}{k\ln(k)} [t]_k^{k+1} = \frac{1}{k\ln(k)}$.
De même, $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}dt = \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$.
On obtient finalement :

$$\frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \geq \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}.$$

Avec la première inégalité, on a que pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Avec la deuxième inégalité, on a en décalant l'indice que pour tout $k \geq 3$,

$$\frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt.$$

On a donc bien que pour tout $k \geq 3$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt.$$

(b) Soit $n \geq 3$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln(t)}dt.$$

Avec la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt \leq S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt.$$

On calcule les intégrales :

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}dt = [\ln(\ln(t))]_3^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))$$

et

$$\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt = [\ln(\ln(t))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

Finalement,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2\ln(2)} \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

En divisant par $\ln(\ln(n)) > 0$,

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} - \frac{\ln(\ln(3))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))}.$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} &= \frac{\ln(\ln(n)+\ln(1+1/n))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln\left(\ln(n)\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{(par continuité du ln)},\end{aligned}$$

on a

$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} - \frac{\ln(\ln(3))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$ donc $S_n \sim \ln(\ln(n))$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge vers $+\infty$.

4. (a) Montrons que $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.
   - Croissance de $(u_n)_{n\geq 2}$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (S_{n+1} - \ln(\ln(n+2))) - (S_n - \ln(\ln(n+1))) \\ &= S_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+2)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - (\ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln(n+1))) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t\ln(t)}dt \geq 0,\end{aligned}$$

   d'après la première inégalité de la question 3.(a) avec $k = n+1$.

- Décroissance de $(v_n)_{n\geq 2}$:
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= (S_{n+1}-\ln(\ln(n+1)))-(S_n-\ln(\ln(n))) \\ &= S_n+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln(\ln(n+1))-S_n+\ln(\ln(n)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-(\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt \leq 0, \end{aligned}$$
d'après la deuxième inégalité de la question 3.(a) avec $k=n+1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$:
$$\begin{aligned} v_n-u_n &= (S_n-\ln(\ln(n)))-(S_n-\ln(\ln(n+1))) = \ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n)) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$
par continuité de la fonction logarithme en 0.

Les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont donc adjacentes et elles convergent donc vers une même limite ℓ.

(b) D'après la question précédente, comme $(u_n)_{n\geq 2}$ croissante et $(v_n)_{n\geq 2}$ décroissante, on en déduit que pour tout $n\geq 2$: $u_n\leq \ell\leq v_n$.
En soustrayant par v_n dans les inégalités $u_n\leq\ell\leq v_n$, on obtient : $u_n-v_n\leq \ell-v_n\leq 0$.
En multipliant par $-1<0$, on obtient : $0\leq v_n-\ell\leq v_n-u_n$.
Or, on a vu à la question précédente que $v_n-u_n=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))$. Alors, avec la première inégalité de la question 3.(a) :
$$v_n-u_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt\leq\frac{1}{n\ln(n)}.$$
On a donc bien, pour tout $n\geq 2$, $0\leq v_n-\ell\leq\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(c) Voici le programme pour obtenir ℓ à 10^{-5} près :

```
n = 2
S = 1/(2*np.log(2))
while (1/(n*np.log(n))) > 10**(-5) :
    n = n+1
    S = S + 1/(n*np.log(n))
v = S - np.log(np.log(n))
print(v)
```

Correction de l'exercice 18

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de paramètre $1/2\leq 1$ donc elle est divergente. La suite des sommes partielles (S_n) diverge donc. Et comme c'est une série à termes positifs, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

2. (a) Soit $k\geq 1$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
$$k\leq t\leq k+1\Rightarrow \sqrt{k}\leq\sqrt{t}\leq\sqrt{k+1}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{t}}\geq\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

On intègre pour t allant de k à $k+1$ (bornes croissantes) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt.$$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_k^{k+1} 1 dt = \frac{1}{\sqrt{k}} [t]_k^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

De même, $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

On a donc que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Avec la première inégalité, on a que pour tout $k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Avec la deuxième inégalité, on a en décalant l'indice que pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

Finalement, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

(b) On a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_k^{k+1} t^{-1/2} dt = \left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_k^{k+1} = \left[2\sqrt{t}\right]_k^{k+1} = 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}.$$

De même,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_{k-1}^{k} = 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}.$$

Avec la question précédente, on a donc que pour tout $k \geq 2$:

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 2 à n :

$$2\sum_{k=2}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sum_{k=2}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Par télescopage sur les membres de gauche et de droite, on obtient finalement :

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} \leq S_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2.$$

(c) On a obtenue à la question précédente que :

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

En divisant par $2\sqrt{n} > 0$:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par continuité de la racine carrée et $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$ et donc $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= (S_n - 2\sqrt{n}) - (S_{n-1} - 2\sqrt{n-1}) = S_n - S_{n-1} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \sim 2\sqrt{n}$. Par opération sur les équivalents, on a :

$$w_n - w_{n-1} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})^2} \sim \frac{-1}{4n^{3/2}}.$$

On a bien deux constantes $\alpha = \frac{3}{2}$ et $K = -\frac{1}{4}$ telles que $w_n - w_{n-1} \sim \frac{K}{n^\alpha}$.

(b) On sait que $w_n - w_{n-1} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})^2} \sim \frac{-1}{4n^{3/2}}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car c'est une série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$. Par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum_{n\geq 1}(w_n - w_{n-1})$ converge.

(c) Par télescopage, $w_n - w_1 = \sum_{k=1}^{n}(w_k - w_{k-1})$.

Avec la question précédente, $S_n - 2\sqrt{n} = w_1 + \sum_{k=1}^{n}(w_k - w_{k-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{w_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(w_k - w_{k-1})}_{=\beta\in\mathbb{R}}$.

Ainsi, $S_n - 2\sqrt{n} - \beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $S_n - 2\sqrt{n} - \beta = o(1)$ et finalement $S_n = 2\sqrt{n} + \beta + o(1)$.