Correction du TD 6

Étude locale de fonctions

Correction de l'exercice 13 (EDHEC)

1. La fonction ch est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison linéaire de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$) et

$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Or, par croissance du logarithme :

$$ch'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a au voisinage de 0 :

$$ch(x) = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

3. (a) Démontrons par récurrence sur n que u_n existe et $u_n > 0$ (propriété notée $\mathcal{P}(n)$).

Ini. $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Comme $ch(u_n) \geq 1 > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{ch(u_n)}$ existe.
Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{ch(u_n)} > 0$.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Il reste à montrer que (u_n) est strictement décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{ch(u_n)} - u_n = \frac{u_n(1 - ch(u_n))}{ch(u_n)} > 0$$

car $u_n > 0$ et $ch(u_n) > 1$ (car $u_n \neq 0$). Donc (u_n) est bien strictement décroissante.

(b) (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$ d'après le théorème des suites monotones. Par passage à la limite dans la relation de récurrence (les fonctions sont continues) :

$$\ell = \frac{\ell}{ch(\ell)} \Leftrightarrow \frac{\ell(1 - ch(\ell))}{ch(\ell)} = 0 \Leftrightarrow \ell(1 - ch(\ell)) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0.$$

4. (a) $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} < 0$ car $u_n > 0$ et (u_n) strictement décroissante.

(b) $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{1}{ch(u_n)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par continuité de ch et car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(c) On a que $\ln(1+v_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Donc par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) = \ln(u_{n+1}).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc la série de terme général $\ln(1+v_n)$ diverge.

Comme $\ln(1+v_n) \sim v_n$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$), on a par comparaison de série à termes négatifs que la série de terme général v_n diverge.

5. On a :

$$v_n = \frac{1}{ch(u_n)} - 1 = \frac{1 - ch(u_n)}{ch(u_n)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a avec le DL de ch (question 2) :

$$v_n = \frac{-\frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)}{ch(u_n)} \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} ch(u_n) = 1$.

Par comparaison de série à termes négatifs, la série de terme général $-\dfrac{u_n^2}{2}$ diverge et donc la série de terme général u_n^2 également.

Correction de l'exercice 14 (ECRICOME 2014)

1. (a) f est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions usuelles continues (avec, pour $x > 0$, $1 + x > 0$ et $\ln(1+x) \neq 0$ car la fonction ln est strictement croissante). Au voisinage de 0^+, on a :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \sim \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 = f(0).$$

Donc f est continue en 0^+ et donc sur $[0, +\infty[$.

(b) Au voisinage de 0^+, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x\ln(1+x)} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc f est dérivable (à droite) en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

(c) Pour le développement limité :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Avant de chercher un équivalent de $f'(x)$ au voisinage de 0, calculons $f'(x)$ pour $x > 0$ (f étant dérivable sur $]0, +\infty[$) :

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 du numérateur obtenu plus haut, on obtient :

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{(\ln(1+x))^2} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

(d) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = f'(0)$ donc f' est continue en 0. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

2. (a) Si $x > 0$, alors $1 + x > 1$ donc $\ln(1 + x) > 0$ et, par quotient, $f(x) > 0$. D'autre part, $f(0) = 1 > 0$. Donc, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) > 0$.

(b) Démontrons par récurrence sur n que u_n existe et $u_n > 0$ (propriété notée $\mathcal{P}(n)$).

Ini. $u_0 = e > 0$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0,+\infty[$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe (car f est définie sur $[0,+\infty[$) et, d'après la question précédente, $u_{n+1} > 0$.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

3. (a) Soit $x \geq e - 1$.

- On a $1 + x \geq e$ donc $\ln(1 + x) \geq 1$ (car la fonction ln est croissante).
  Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\ln(1+x)} \leq 1$.
  En multipliant par x qui est positif, on obtient $f(x) \leq x$.
- Toujours avec $\ln(1 + x) \geq 1$, en multipliant par $1 + x$ qui est positif, on obtient : $(1 + x)\ln(1 + x) \geq 1 + x$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $x > e - 1$, $(1 + x)\ln(1 + x) \geq 1 + x$ donc $(1 + x)\ln(1 + x) - x \geq 0$. On en déduit que :

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} \geq 0.$$

(c) Démontrons par récurrence sur n que $e - 1 \leq u_n$ (propriété notée $\mathcal{P}(n)$).

Ini. $u_0 = e \geq e - 1$ donc la propriété est vraie au premier rang.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $e - 1 \leq u_n$. Comme f est croissante sur $[e - 1;+\infty[$ (question 3.(b)), $f(e - 1) \leq f(u_n)$. Or, $f(e - 1) = e - 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$. Donc $e - 1 \leq u_{n+1}$.

Ccl. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e - 1$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e - 1$ et $\forall x \geq e - 1$, $f(x) \leq x$. Donc $f(u_n) \leq u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Elle est minorée (par $e - 1$) donc elle converge vers une limite $L \geq e - 1$. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (f est continue sur $\mathbb{R}_+$), on a :

$$f(L) = L \Leftrightarrow \frac{L}{\ln(1+L)} = L \Leftrightarrow \ln(1+L) = 1 \Leftrightarrow 1 + L = e \Leftrightarrow L = e - 1.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e - 1$.