

Correction du TD 9

Couples de variables aléatoires discrètes

Correction de l'exercice 18 (EDHEC 1999)

1. (a) Pour $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 P(S = k) &= P(X + Y = k) \\
 &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (X = i) \cap (Y = k - i)\right) \quad (\text{avec le SCE } (X = i)_{1 \leq i \leq n}) \\
 &= \sum_{i=1}^n P((X = i) \cap (Y = k - i)) \quad (\text{par incompatibilité}) \\
 &= \sum_{i=1}^n P(X = i)P(Y = k - i) \quad (\text{par indépendance}).
 \end{aligned}$$

On veut que $1 \leq i \leq n$ (valeurs de X) et que $1 \leq k - i \leq n$ (valeurs de Y) que l'on résout par rapport à i , puisque c'est sur i que l'on fait la somme :

$$1 \leq k - i \leq n \iff k - n \leq i \leq k - 1$$

Donc pour avoir les deux contions, il faut

- que i soit supérieur au plus grand de 1 et de $k - n$. Il faut donc déterminer qui est le plus grand. Cela dépend de k . Et comme $k \leq n + 1$, alors $k - n \leq 1$. Le plus grand des deux est donc 1 et les deux conditions équivalent à $1 \leq i$.
- que i soit inférieur au plus petit de n et de $k - 1$ et comme $k \leq n + 1$, on a $k - 1 \leq n$ et le plus petit des deux est $k - 1$. Les deux conditions équivalent donc à $i \leq k - 1$.

Finalement :

$$P(S = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2},$$

les probabilité étant $1/n$ car, dans la somme, on a $1 \leq i \leq k - 1$ donc $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k - i \leq n$ (conditions que l'on a résolu justement).

(b) Pour $k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket$, on refait ici la même décomposition :

$$P(S = k) = \sum_{i=1}^n P(X = i)P(Y = k - i).$$

Mais cette fois, comme $k \geq n + 2$, alors $k - n \geq 2$ et la double condition $1 \leq i$ et $k - n \leq i$ équivaut à $k - n \leq i$. Et de même $k \geq n + 2$ donc $k - 1 \geq n + 1$ donc la double condition $i \leq n$ et $i \leq k - 1$ équivaut à $i \leq n$. Finalement :

$$P(S = k) = \sum_{i=k-n}^n P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{n - (k - n) + 1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

2. (a) Avec le SCE $(Z = k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = Z) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (Z = k) \cap (X + Y = k)\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n P((Z = k) \cap (X + Y = k)) \quad (\text{par incompatibilité}) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X + Y = k)P(Z = k) \quad (\text{par indépendance}).
 \end{aligned}$$

Ici, seule la valeur $k = 1$ joue un rôle particulier, où $P(X + Y = 1) = 0$ car la valeur minimale de la somme est 2. Donc :

$$\begin{aligned} P(X + Y = Z) &= \sum_{k=2}^n P(X + Y = k) P(Z = k) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^n (k-1) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{h=1}^{n-1} h = \frac{(n-1)n}{n^3 2} = \frac{n-1}{2n^2} \end{aligned}$$

(b) Ici, on revient à la définition : valeurs possibles et probabilités.

$1 \leq Z \leq n \iff 1 \leq n+1-Z \leq n$ donc $T(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$P(T = k) = P(n+1-Z = k) = P(Z = n+1-k) = \frac{1}{n}$$

car $n+1-k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Finalement, $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

(c) Comme Z est indépendante de X et de Y , alors $T = n+1-Z$ l'est aussi (car les événements liés à T ne sont liés qu'à Z). De plus,

$$P(X + Y + Z = n+1) = P(X + Y = n+1-Z) = P(X + Y = T).$$

On est ramené aux conditions initiales de l'exercice avec trois variables X , Y et T qui sont indépendantes. Donc :

$$P(X + Y + Z = n+1) = \frac{n-1}{2n^2}.$$