Correction du TD 9

Couples de variables aléatoires discrètes

Correction de l'exercice 11 (EDHEC 2019)

1. Au mieux $X = 1$, au pire $X = n$ et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

2. (a) Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{i-1}$, pour le i-eme tirage, il reste $n - (i-1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire.
Donc $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-(i-1)-1}{n-(i-1)} = \dfrac{n-i}{n-i+1}$

   (b) $(X = k)$ est l'événement $B_1 \cap \ldots B_{k-1} \cap N_k$. En utilisant la formule des probas composées (et par télescopage multiplicatif) :
$$P(X=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

   (c) On a donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. (a) Notons B'_i l'événement "le i-eme tirage donne une boule blanche numérotée 0".
$$(X = k) \cap (Y = 0) = B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{k-1} \cap N_k.$$
Par le même principe :
$$\begin{aligned} P\left[(X=k)\cap(Y=0)\right] &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{(n-k)\times 1}{n(n-1)} = \frac{n-k}{n(n-1)} \end{aligned}$$

   (b) On utilise le système complet d'événements $(X = k)_{k \in [\![1,n]\!]}$. La formule des probabilités totales donne :
$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k \cap Y=0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k)$$
On pose $i = n - k$ dans cette dernière somme :
$$P(Y=0) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=n-1}^{0} i = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}.$$

   (c) $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$. Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $E(Y) = \dfrac{1}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 18 (EDHEC 1999)

1. (a) Pour $k \in [\![2, n+1]\!]$
$$\begin{aligned} P(S=k) &= P\left(X+Y=k\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (X=i)\cap(Y=k-i)\right) \quad \text{(avec le SCE } (X=i)_{1\leq i\leq n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=k-i)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i)P(Y=k-i) \quad \text{(par indépendance).} \end{aligned}$$

On veut que $1 \leq i \leq n$ (valeurs de X) et que $1 \leq k-i \leq n$ (valeurs de Y) que l'on résout par rapport à i, puisque c'est sur i que l'on fait la somme :

$$1 \leq k-i \leq n \Longleftrightarrow k-n \leq i \leq k-1$$

Donc pour avoir les deux contions, il faut

- que i soit supérieur au plus grand de 1 et de $k-n$. Il faut donc déterminer qui est le plus grand. Celà dépend de k. Et comme $k \leq n+1$, alors $k-n \leq 1$. Le plus grand des deux est donc 1 et les deux conditions équivalent à $1 \leq i$.
- que i soit inférieur au plus petit de n et de $k-1$ et comme $k \leq n+1$, on a $k-1 \leq n$ et le plus petit des deux et $k-1$. Les deux conditions équivalent donc à $i \leq k-1$.

Finalement :

$$P(S=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i) P(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2},$$

les probabilité étant $1/n$ car, dans la somme, on a $1 \leq i \leq k-1$ donc $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k-i \leq n$ (conditions que l'on a résolu justement).

(b) Pour $k \in [\![n+2, 2n]\!]$, on refait ici la même décomposition :

$$P(S=k) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i)P(Y=k-i).$$

Mais cette fois, comme $k \geq n+2$, alors $k-n \geq 2$ et la double condition $1 \leq i$ et $k-n \leq i$ équivaut à $k-n \leq i$. Et de même $k \geq n+2$ donc $k-1 \geq n+1$ donc la double condition $i \leq n$ et $i \leq k-1$ équivaut à $i \leq n$. Finalement :

$$P(S=k) = \sum_{i=k-n}^{n} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

2. (a) Avec le SCE $(Z=k)_{k \in [\![1,n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X+Y=Z) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} (Z=k) \cap (X+Y=k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P((Z=k) \cap (X+Y=k)) \quad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=k) P(Z=k) \quad \text{(par indépendance).}
\end{aligned}$$

Ici, seule la valeur $k=1$ joue un rôle particulier, où $P(X+Y=1)=0$ car la valeur minimale de la somme est 2. Donc :

$$\begin{aligned}
P(X+Y=Z) &= \sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k) P(Z=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k-1) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{h=1}^{n-1} h = \frac{(n-1)\,n}{n^3 2} = \frac{n-1}{2n^2}
\end{aligned}$$

(b) Ici, on revient à la définition : valeurs possibles et probabilités.
$1 \leq Z \leq n \iff 1 \leq n+1-Z \leq n$ donc $T(\Omega) = [[1,n]]$ et pour tout $k \in [[1,n]]$ on a

$$P(T=k) \quad = \quad P(n+1-Z=k) = P(Z=n+1-k) = \frac{1}{n}$$

car $n+1-k \in [\![1,n]\!]$.
Finalement, $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

(c) Comme Z est indépendante de X et de Y, alors $T = n+1-Z$ l'est aussi (car les événements liés à T ne sont liés qu'à Z). De plus,

$$P(X+Y+Z=n+1) = P(X+Y=n+1-Z) = P(X+Y=T).$$

On est ramené aux conditions initiales de l'exercice avec trois variables X, Y et T qui sont indépendantes. Donc :

$$P(X+Y+Z=n+1) = \frac{n-1}{2n^2}.$$
