Correction du TP10

Sommes doubles

Exercice 1 1. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq 4}} \frac{i}{j} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}$.

2. $\displaystyle 1\times 1^2+2\times 1^2+3\times 1^2+1\times 2^2+2\times 2^2+3\times 2^2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq 3\\1\leq j\leq 2}} i\times j^2$.

Exercice 2 1. La valeur de S correspond à la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij^2$.

2. Les indices i et j étant indépendants, on a:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} ij^2 &= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n ij^2\right) = \sum_{i=1}^n\left(i\left(\sum_{j=1}^n j^2\right)\right) = \sum_{i=1}^n\left(i\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}.\end{aligned}$$

Exercice 3 1. La procédure suivante permet de calculer S_n, T_n et U_n:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
T=0
U=0
for i=1:n do
    for j=1:n do
        S=S+i
        T=T+j*2^i
        U=U+i*j
    end
end
disp(U,T,S)
```

On teste cette procédure pour $n=5$:

```
-->exec('C:\TP\TP11\exo3a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
    75.
    930.
    225.
```

2. Calculons ces trois sommes:

- Pour S_n:

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} i = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n i\right) = \sum_{j=1}^n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\times\sum_{j=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2}\times n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

- Pour T_n:

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{1\leq i,j\leq n} j2^i = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n j2^i\right) = \sum_{i=1}^n\left(2^i\left(\sum_{j=1}^n j\right)\right) = \sum_{i=1}^n\left(2^i\times\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\sum_{i=1}^n 2^i = \frac{n(n+1)}{2}\times 2\frac{1-2^n}{1-2} = n(n+1)\left(2^n-1\right).\end{aligned}$$

- Pour U_n:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i \times \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

On teste ces résultats pour $n = 5$:

```
-->(5^2)*(5+1)/2
 ans  =
    75.
-->5*(5+1)*(2^5-1)
 ans  =
    930.
-->(5^2)*((5+1)^2)/4
 ans  =
    225.
```

On obtient les mêmes résultats que ceux obtenus à la question précédente.

Exercice 4 1. $\sum_{1\leq i\leq j\leq 5}(j-i) = (1-1)+(2-1)+(3-1)+(4-1)+(5-1)+(2-2)+(3-2)+(4-2)+(5-2)+(3-3)+(4-3)+(5-3)+(4-4)+(5-4)+(5-5)$.

2. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4} = \sum_{1\leq i\leq j\leq 4}\frac{i}{j}$.

Exercice 5 1. $\sum_{1\leq i<j\leq 5}(j-i) = (2-1)+(3-1)+(4-1)+(5-1)+(3-2)+(4-2)+(5-2)+(4-3)+(5-3)+(5-4)$.

2. $\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\frac{5}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4} = \sum_{1\leq i<j\leq 5}\frac{j}{i}$.

Exercice 6 1. La valeur de S correspond à la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$. On teste pour $n = 5$:

```
-->exec('C:\TP11\exo4a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
    10.
```

2. On a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right). \end{aligned}$$

On obtient deux sommes usuelles. Donc:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+1)+2n}{4} = \frac{n(n+3)}{4}.$$

On teste la formule obtenue pour $n = 5$

```
-->5*(5+3)/4
 ans  =
    10.
```

On obtient le même résultat qu'à la question 1.

Exercice 7 1. La procédure suivante permet de calculer S_n et T_n:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
S=0
T=0
for i=1:n do
    for j=i:n do
        S=S+1
    end
end
for i=1:(n-1) do
    for j=(i+1):n do
        T=T+i
    end
end
disp(T,S)
```

On teste cette procédure pour $n = 5$:

```
-->exec('C:\TP\TP11\exo5a.sce', -1)
Donner une valeur de n: 5
    15.
    85.
```

2. Pour S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = -\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)\sum_{i=1}^{n} 1 = -\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Pour T_n:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

En testant pour $n = 5$, on obtient les mêmes résultats que ceux obtenus à la question précédente.

Exercice 8 1.

$$\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{1\le i\le j\le n} ij &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(j \times \frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)}{24} \\ &= \frac{n(n+1)\left(3n(n+1) + 2(2n+1)\right)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n + 4n + 2}{24} \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{24}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(i+j)\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}i+\sum_{i=1}^{j-1}j\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2}+(j-1)j\right)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\frac{3(j^2-j)}{2}=\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n}j^2-\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n}j=\frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j^2-1\right)-\frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j-1\right)\\
&= \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{4}=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}2^{i+j}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}2^{i+j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(2^j\sum_{i=0}^{n}2^i\right)=\sum_{j=0}^{n}2^j\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\frac{1-2^{n+1}}{-1}\frac{1-2^{n+1}}{-1}=(1-2^{n+1})^2$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n}|i-j| &= \sum_{1\le i<j\le n}|i-j|+\sum_{1\le i\le n}0+\sum_{1\le j<i\le n}|i-j|=\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)+\sum_{1\le j<i\le n}(i-j)\\
&= 2\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)=2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i)\right)=2\sum_{j=2}^{n}\left(j^2-\frac{j(j+1)}{2}\right)=2\sum_{j=2}^{n}\frac{j^2-j}{2}\\
&= \sum_{j=2}^{n}(j^2-j)=\sum_{j=1}^{n}(j^2-j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)((2n+1)-3)}{6}\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j) &= \sum_{1\le i\le j\le n}i+\sum_{1\le j<i\le n}j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}j\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{(i-1)i}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2}=\sum_{j=1}^{n}j(j+1)-\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$