Correction - TP 10

Équations différentielles

Exercice 1

Le schéma représente les courbes des fonctions solutions de l'équation $y' = iy$ avec la condition $y(0) = 1$ (en effet, le vecteur `t` commence à 0 et le programme indique `y0 = 1`), ceci pour les valeurs de i prises par la variable `i`, c'est-à-dire -2, -1, 0 et 1 (car `range` arrête l'énumération avant 2).

Les courbes correspondant à $i = -2$ et $i = -1$ semblent converger vers 0 en $+\infty$, celle qui correspond à $i = 0$ semble constante égale à 1 et celle correspondant à $i = 2$ semble tendre vers $+\infty$ en $+\infty$.

Pour s'en assurer, résolvons ces équations. Fixons i. On sait que les fonctions y vérifiant $y' = iy$ sont définies par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda e^{it}$, avec λ un réel déterminé par la condition $y(0) = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$.
Le schéma représente donc les fonctions : $t \mapsto e^{-2t}$, $t \mapsto e^{-t}$, $t \mapsto 1$ et $t \mapsto e^{t}$.
Les deux premières convergent bien vers 0 en $+\infty$, la troisième est constante égale à 1 et la dernière tend bien vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 2

1. (a) Dans la console `Python` :

```
>>> A = np.array([[-17, -3], [3, -7]])
>>> Sp, VP = al.eig(A)
>>> print(Sp)
[-16.  -8.]
>>> print(VP)
[[-0.9486833   0.31622777]
 [ 0.31622777  -0.9486833]]
```

   (b) La variable `VP` des instructions `Python` contient une matrice dont la première colonne est une base du sous-espace propre associé à la première valeur propre contenue dans la variable `Sp`, et de même pour la seconde colonne. Or, on s'aperçoit que, au signe près, `0.9486833` est le triple de `0.31622777` donc on peut prendre pour base du sous-espace propre $E_{-8}(A)$ la famille réduite au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et pour base du sous-espace propre $E_{-16}(A)$ la famille réduite au vecteur $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) de cardinal égal à la dimension de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable et on sait alors que la forme générale des solutions du système (S) est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \lambda e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu e^{-16t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

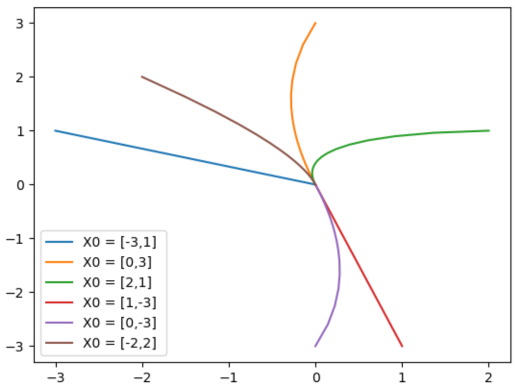
   où λ et μ sont des constantes réelles.

2. (a) On utilise les instructions `Python` suivantes pour obtenir le tracé :

```python
A = np.array([[-17, -3], [3, -7]])
t = np.linspace(0, 2, 100)
def syst(X, t):
    return(np.dot(A, X))
X0 = [-3, 1]
M = odeint(syst, X0, t)
x = M[:, 0]
y = M[:, 1]
plt.plot(x, y, label = "X0 = [-3, 1]")
X0 =[0, 3]
M = odeint(syst, X0, t)
```

```python
x = M[:, 0]
y = M[:, 1]
plt.plot(x, y, label = "X0 = [0, 3]")
X0 = [2, 1]
M = odeint(syst, X0, t)
x = M[:, 0]
y = M[:, 1]
plt.plot(x, y, label = "X0 = [2,1]")
X0 = [1, -3]
M = odeint(syst, X0, t)
x = M[:, 0]
y = M[:, 1]
plt.plot(x, y, label = "X0 = [1,-3]")
X0 = [0, -3]
M = odeint(syst, X0, t)
x = M[:, 0]
y = M[:, 1]
plt.plot(x, y, label = "X0 = [0,-3]")
X0 = [-2, 2]
M = odeint(syst, X0, t)
x = M[:, 0]
y = M[:, 1]
plt.plot(x, y, label = "X0 = [-2,2]")
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :



(b) D'après la question 1, la matrice A associée au système différentiel possède deux valeurs propres strictement négatives (qui sont -8 et -16), donc la matrice A est inversible et ainsi, l'unique point d'équilibre du système est $(0,0)$.

De plus, c'est un point d'équilibre stable : toutes les trajectoires convergent vers $(0,0)$ (car les valeurs propres sont strictement négatives).

(c) Les trajectoires qui semblent être rectilignes sont celles qui correspondent aux conditions initiales $x(0) = -3$ et $y(0) = 1$ d'une part, et $x(0) = 1$ et $y(0) = -3$ d'autre part. On vérifie que c'est effectivement le cas :

- Dans le cas où $x(0) = -3$ et $y(0) = 1$, on a : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

  On a donc $x(t) = -3e^{-16t}$ et $y(t) = e^{-16t}$, donc la trajectoire solution est

  $$\left\{(-3e^{-16t}, e^{-16t}) \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

  Or e^{-16t} décrit $\mathbb{R}_+^*$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$, donc la trajectoire peut s'écrire $\left\{(-3c, c) \mid c \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. Tous les points de cette trajectoire sont sur la demi-droite d'origine $(0,0)$ et dirigée par le vecteur $(-3,1)$.

- Dans le cas où $x(0) = 1$ et $y(0) = -3$, on a : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.

On a donc $x(t) = e^{-8t}$ et $y(t) = -3e^{-8t}$, donc la trajectoire solution est

$$\left\{(-3e^{-16t}, e^{-16t}) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(c, -3c) \mid c \in \mathbb{R}_+^*\right\} = \left\{c(1, -3) \mid c \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Tous les points de cette trajectoire sont sur la demi-droite d'origine $(0, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, -3)$.

Exercice 3

1. Les valeurs propres de la matrice A sont les réels λ tels que $\det(A - \lambda I_2) = 0$, c'est-à-dire tels que $\lambda^2 + 1 = 0$. Cette équation n'admet pas de solution donc A n'admet pas de valeur propre et elle n'est donc pas diagonalisable.

2. Le programme commande le tracé de la trajectoire solution (x, y) du système différentiel, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x(t), y(t))$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ (dans le programme, t parcourt $[0, 7]$). Or on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + y^2)'(t) = 2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) = 2(-y(t))x(t) + 2x(t)y(t) = 0.$$

On en déduit que la fonction $x^2 + y^2$ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $x^2(0) + y^2(0) = 1^2 + 0^2 = 1$, alors elle est constante égale à 1 : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x^2(t) + y^2(t) = 1$, ce qui s'écrit aussi :

$$(x(t) - 0)^2 + (y(t) - 0)^2 = 1^2.$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. La trajectoire solution est incluse dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 4

1. (a) Dans la console `Python` :

```
>>> A = np.array([[-10, 2, 5], [-9, 1, 5], [-12, 2, 7]])
>>> Sp, VP = al.eig(A)
>>> print(Sp)
[2.  -3.   -1.]
>>> print(VP)
[[0.40824829   0.57735027  -0.40824829]
 [0.40824829   0.57735027  -0.81649658]
 [0.81649658   0.57735027  -0.40824829]]
```

On sait que la variable `Sp` contient les valeurs propres de la matrice A et que les colonnes de la variable `VP` sont formées d'une base des sous-espaces propres associés.
On en déduit que A possède trois valeurs propres distinctes : 2, -3 et -1. Quant aux bases des sous-espaces propres, on sait qu'on peut les choisir à un coefficient multiplicatif (non nul) près, donc on peut faire les choix suivants :

- Une base du sous-espace propre $E_2(A)$ est la famille réduite à un vecteur $U = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
- Une base du sous-espace propre $E_{-3}(A)$ est la famille réduite à un vecteur $V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
- Une base du sous-espace propre $E_{-1}(A)$ est la famille réduite à un vecteur $W = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

(b) Par concaténation, la famille (U, V, W) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. Donc c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.

2. (a) On sait qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout réel t, on a :

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = ae^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + be^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + ce^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ae^{2t} + be^{-3t} + ce^{-t}\\ae^{2t} + be^{-3t} + 2ce^{-t}\\2ae^{2t} + be^{-3t} + ce^{-t}\end{pmatrix}.$$

Le script du programme commande les courbes correspondant aux conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$. Donc :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+2c=1 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel t,

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-3t} + e^{-t} \\ y(t) = -e^{-3t} + 2e^{-t} \\ z(t) = -e^{-3t} + e^{-t} \end{cases}$$

On constate ainsi que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = z(t)$. Ces fonctions sont donc égales et leurs trajectoires sont confondues. Voilà pourquoi on ne voit que deux courbes au lieu de trois (on voit celle de y et celle de z qui efface celle de x en "repassant dessus").

(b) On remarque que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$, donc la trajectoire converge vers le point d'équilibre $(0, 0, 0)$.

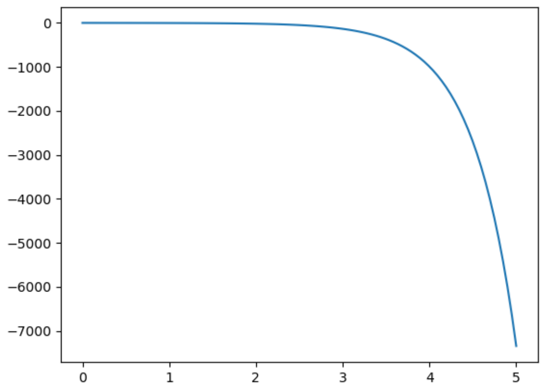
Exercice 5

- Cas où $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$:

1. Voici le programme **Python** :

```python
A = np.array([[0, 1], [2, 1]])
t = np.linspace(0, 5, 100)
def syst(X, t):
    return(np.dot(A, X))
X0 = [1, -2]
M = odeint(syst, X0, t)
y = M[:, 0]
plt.plot(t, y)
plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :



2. Il semble que la solution tend vers $-\infty$.

3. Pour valider la conjecture par le calcul, il suffit d'exprimer la solution de l'équation. Pour cela, résolvons l'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Cette équation possède deux solutions -1 et 2. Donc il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}.$$

Si $(y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$, on a :

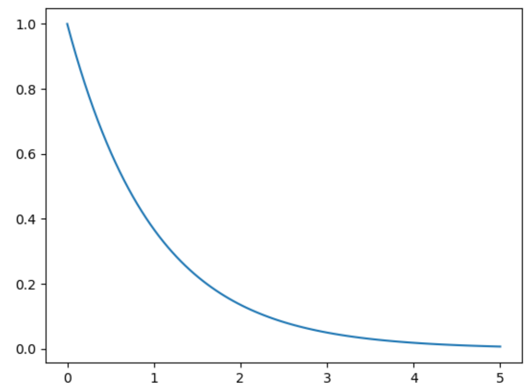
$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4/3 \\ b=-1/3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad y(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

- Cas où $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$:

  1. Voici le programme `Python` :

```python
A = np.array([[0, 1], [2, 1]])
t = np.linspace(0, 5, 100)
def syst(X, t):
    return(np.dot(A, X))
X0 = [1, -1]
M = odeint(syst, X0, t)
y = M[:, 0]
plt.plot(t, y)
plt.show()
```

  On obtient le graphique suivant :



  2. Il semble que la solution tend vers 0.
  3. Pour valider la conjecture par le calcul, il suffit d'exprimer la solution de l'équation. D'après ce qui précède, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}.$$

  Si $(y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$, on a :

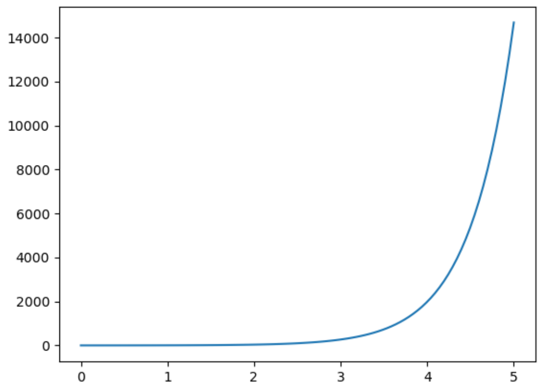
$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ -a + 2b = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad y(t) = e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Cas où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$:

  1. Voici le programme `Python` :

```python
A = np.array([[0, 1], [2, 1]])
t = np.linspace(0, 5, 100)
def syst(X, t):
    return(np.dot(A, X))
X0 = [1, 1]
M = odeint(syst, X0, t)
y = M[:, 0]
plt.plot(t, y)
plt.show()
```

  On obtient le graphique suivant :



2. Il semble que la solution tend vers $+\infty$.
3. Pour valider la conjecture par le calcul, il suffit d'exprimer la solution de l'équation. D'après ce qui précède, il existe deux réels λ et μ tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}.$$
Si $(y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ -a + 2b = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = 2/3 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 6

1. Avec les notations proposées, on a :
$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -6y'' - 11y' - 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = AX, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}.$$
La première composante de X n'est autre que la solution de l'équation donnée.

2. (a) Dans la console `Python` :
```
>>> A = np.array([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [-6, -11, -6]])
>>> Sp, VP = al.eig(A)
>>> print(Sp)
[-1.  -2.   -3.]
>>> print(VP)
[[-0.57735027   0.21821789  -0.10482848]
 [-0.57735027  -0.43643578  -0.31448545]
 [-0.57735027   0.87287156  -0.94345635]]
```
(b) On sait que la variable `Sp` contient les valeurs propres de la matrice A et que les colonnes de la variable `VP` sont formées d'une base des sous-espaces propres associés.
On en déduit que A possède trois valeurs propres distinctes : -1, -2 et -3. Quant aux bases des sous-espaces propres, on sait qu'on peut les choisir à un coefficient multiplicatif (non nul) près, donc on peut faire les choix suivants (pour n'avoir que des 1 sur la première ligne de P) :
- Une base du sous-espace propre $E_{-1}(A)$ est la famille réduite à un vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Une base du sous-espace propre $E_{-2}(A)$ est la famille réduite à un vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- Une base du sous-espace propre $E_{-3}(A)$ est la famille réduite à un vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Par concaténation, la famille (U, V, W) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. Donc c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.
Donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ est inversible et $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) On sait que la solution du système différentiel est de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = ae^{-t}U + be^{-2t}V + ce^{-3t}W$$

où a, b, c sont trois réels à déterminés par $X(0)$.

Or $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$, $y''(0) = 14$, donc $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$ et les instructions proposées donnent la solution du système $P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a - 2b - 3c = -6 \\ a + 4b + 9c = 14 \end{cases}$$

Dans la console `Python` :

```
>>> P = np.array([[1, 1, 1], [-1, -2, -3], [1, 4, 9]])
>>> X0 = [3, -6, 14]
>>> al.solve(P, X0)
array([1., 1., 1.])
```

Donc $a = b = c = 1$ et

$$X(t) = e^{-t}U + e^{-2t}V + e^{-3t}W.$$

On n'en retient que la première composante pour obtenir la solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t}.$$
