Correction du TP13

Résolution approchée d'équations $f(x) = 0$

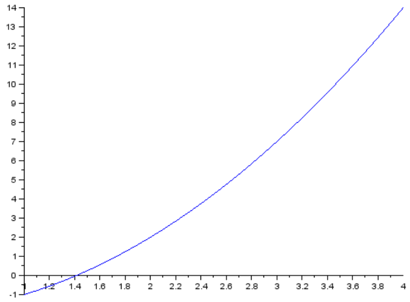
Exercice 1 1. Traçons la fonction $f : x \in [1,4] \mapsto x^2 - 2$.

Pour cela, on commence par la définir sur Scilab :

```
-->function y=f(x); y=x^2-2; endfunction
```

On utilise alors les commandes suivantes :

```
-->clf
-->x=1:0.01:4;
-->plot(x,f)
```



On constate sur la figure obtenue que la fonction f s'annule et change de signe: elle admet un zero, $\sqrt{2}$, sur l'intervalle $[1,4]$.

2. $a_0 = 1$ et $b_0 = 4$. $m_1 = 2,5$. Comme $f(a_0)f(m_1) = -4,25$, $a_1 = 1$ et $b_1 = 2,5$. $m_2 = 1,75$. Comme $f(a_1)f(m_2) = -1,0625$, $a_2 = 1$ et $b_2 = 1,75$.

3. Voici la procédure pour calculer a_n et b_n :

```
n=input('Donner une valeur pour n: ')
a=1
b=4
function y=f(x)
    y=x^2-2
endfunction
for k=1:n do
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)<0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
disp(b,a)
```

4. Voici la procédure de la méthode de la dichotomie et celle modifiée pour calculer le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près :

```
eps=input('Donner une valeur pour eps: ')
a=1
b=4
function y=f(x)
    y=x^2-2
endfunction
while (b-a)>=eps do
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)<0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
disp(b,a)
```

```
a=1
b=4
k=0
function y=f(x)
    y=x^2-2
endfunction
while (b-a)>=10^(-11) do
    k=k+1
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)<0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
disp(k)
```

Avec la méthode de la dichotomie, il faut 39 itérations à Scilab pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.

Exercice 2 1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$". Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation :</u> Par construction, on a soit $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, soit $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Comme $a_0 = a < b = b_0$, on a ainsi l'inégalité $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$. D'autre part, $b_0 - a_0 = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$ et $f(a_0)f(b_0) = f(a)f(b) \leq 0$ par hypothèse. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée.

Par construction, on a soit $a_{n+2} = a_{n+1}$ et $b_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$, soit $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$. Par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. On a donc dans les deux cas l'inégalité $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$.

De plus, par construction, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$. Par hypothèse de récurrence, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Enfin, comme par hypothèse de récurrence $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de signe opposé. Donc $f(m_{n+1}) = f(\dfrac{a_n + b_n}{2})$ n'a pas le même signe que $f(a_n)$ ou $f(b_n)$. Par définition de a_{n+1} et de b_{n+1}, on a bien $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. D'après la question précédente, on a :
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$ donc (a_n) est croissante.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq b_n$ donc (b_n) est décroissante.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

   Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et, d'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite notée ℓ.

3. Comme f est continue sur $[a, b]$, l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ donne par passage à la limite :
$$\lim_{n\to+\infty} (f(a_n).f(b_n)) = \left(\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\right)\left(\lim_{n\to+\infty} f(b_n)\right) = (f(\ell))^2 \leq 0.$$
   L'inégalité $(f(\ell))^2 \leq 0$ implique $(f(\ell))^2 = 0$, et donc $f(\ell) = 0$.

   Par hypothèse, f s'annule en une seule valeur $\alpha \in]a, b[$. Par unicité, si $f(\ell) = 0$, alors $\ell = \alpha$. On a ainsi démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \alpha$.

Exercice 3 1. Équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$:
   - En $x_0 = 3$: $y = 6x - 11$,
   - En $x_0 = 2$: $y = 4x - 6$.

2. x_1 correspond à la valeur approchée de $\sqrt{2}$. Voici sa valeur :
   - lorsque $x_0 = 3$: $x_1 = \dfrac{11}{6}$,
   - lorsque $x_0 = 2$: $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 4 1. $f'(x) = 2x$ et on remarque que f' ne s'annule pas sur $[1, 4]$. On peut donc lui appliquer la méthode de Newton. Alors :
$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$
Et ainsi:
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

2. Voici la procédure pour le calcul des x_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
x=3
for k=1:n do
    x=(1/2)*(x+2/x)
end
disp(x)
```

3. Voici la procédure pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à ε près :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
x=3
while abs(x-sqrt(2))>=eps do
    x=(1/2)*(x+2/x)
end
disp(x)
```

4. Voici la procédure pour déterminer le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près :

```
x=3
k=0
while abs(x-sqrt(2))>=eps do
    k=k+1
    x=(1/2)*(x+2/x)
end
disp(k)
```

Remarquons que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite avec la méthode de Newton est extrêmement rapide : on obtient une précision à 10^{-11} près en seulement 3 itérations (contre 39 pour la méthode de la dichotomie).