Correction du TP28

Variables aléatoires discrètes - Ecricome 2018, voie E

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. • A chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et $1/3$ pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale
$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$
   • On voit que
$$P(A) = P((X=0)\cup(X=2)) = P(X=0) + P(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1+3\times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

2.
```
function res=simulX()
    res=0
    for k=1:3 do
        if rand()<2/3 then
            res=res+1
        end
    end
endfunction
```

3. Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,
$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$
   Alors :
   - $P(G=-30) = P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.
   - $P(G=-10) = P(X=1) = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.
   - $P(G=0) = P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.
   - $P(G=20) = P(X=2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

4. On calcule l'espérance de G :
$$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G=-30) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) \\ &= -30 \times \frac{8}{27} - 10 \times \frac{2}{9} + 20 \times \frac{4}{9} \\ &= -\frac{20}{9} \end{aligned}$$
   On trouve donc que $E(G) > 0$ et le jeu est favorable au joueur.

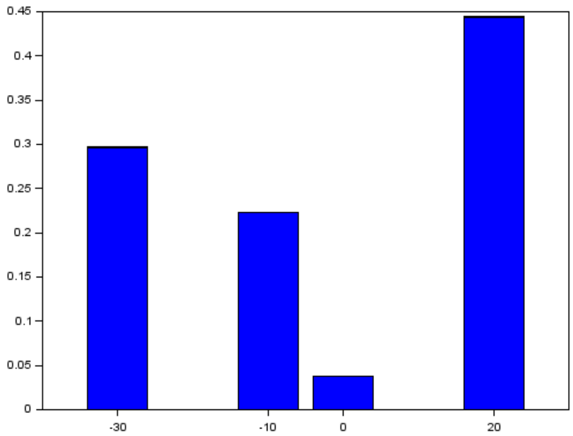
5. (a)
```
function res=simulG()
    n=simulX()
    if (n==0)|(n==2) then
        res= 10*n
    else
        res=-10*n
    end
endfunction
```

(b) La commande `tabul` renvoit une matrice à deux colonnes :
• La première colonne contient les différentes valeurs contenues dans les coefficients de la matrice S (valeurs prises par la variable aléatoire G), rangées dans l'ordre croissant ("i")
• La deuxième colonne contient le nombre d'occurence de chaque valeur (effectif correspondant)

(c)
```
S=zeros(1,100000)
for i=1:100000 do
   S(i)= simulG()
end

M=tabul(S,"i")
disp(M,"M=")

x=M(:,1)
f= M(:,2)/100000
bar(x,f)
```



La probabilité que le joueur gagne 20 euros peut être approchée par la fréquence de l'événement $[G = 20]$ au cours de ces 100000 simulations , c'est-à-dire $f \simeq\ 0,44$.

(d)
```
m=mean(S)
disp(m,"m=")
```
On remarque que la moyenne des simulations de G coïncide avec l'espérance de G.

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,
$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$
et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc
$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

2. (a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}E(Y) &= E((-1)^X)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k}=(-p+1-p)^n=(1-2p)^n.$$

3. D'après les questions 1b. et 2b., on a

$$(1-2p)^n=E(Y)=2P(A)-1\Longleftrightarrow P(A)=\frac{(1-2p)^n+1}{2}.$$

4. On résout

$$\begin{aligned}P(A)\geq\frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{(1-2p)^n+1}{2}\geq\frac{1}{2}\\ &\Longleftrightarrow (1-2p)^n\geq 0\\ &\Longleftrightarrow n \text{ pair ou } 1-2p\geq 0\\ &\Longleftrightarrow n \text{ pair ou } p\leq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A)\geq\frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G)\leq 0$).

1. On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore

$$G=10XY=10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned}E(G) &= \sum_{k=0}^{n}10k(-1)^k P(X=k)\\ &= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}k.\binom{n}{k} &= \frac{k\times n!}{k!\times(n-k)!}=\frac{k\times n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!}\\ &= \frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!}=n.\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

3. Avec les deux questions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k}\\ &= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)}\\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j}\\ &= -10np(1-2p)^{n-1}\end{aligned}$$

4. On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,
$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n\text{impair} \end{aligned}$$
Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien
$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

5. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[0; 1/2]$. Le calcul donne
$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$
On obtient le tableau de variation suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1/2n)$	$\searrow$	0

avec
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0; 1/2]$. Il faut donc choisir
$$p = \frac{1}{2n}.$$

6.
```
function res=simulationsG(n,p)
   X=grand(1,200,'bin',n,p)
   Y=(-1).^X
   res=10.*X.*Y
endfunction
```

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ième joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	9/16	6/16	1/16

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance
$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$
et
$$V(G_i) = E(G_i^2) = E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

2. Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore
$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$
Par linéarité de l'espérance
$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$
et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i,
$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

3.
$$\begin{aligned} |J-500| \geq 400 &\iff J-500 \geq 400 \text{ ou } J-500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$
En particulier, l'événement
$$[J \leq 100] \subset [|J-500| \geq 400]$$
et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

4. En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on voit que
$$P(J \leq 100) \leq P(|J-500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

5. Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.

6.
```
n=2
p=1/4
res=0
for k=1:10000 do
   g=simulationsG(n,p)
   J=-sum(g)
   if J<=100 then
         res=res+1
   end
end
f=res/10000
disp(f,"f=")
```