Correction du TP7

Approximation de la limite de suites adjacentes

Exercice 1 1. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante car :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(4k+1)(4k+3)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{(4k+1)(4k+3)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{(4k+1)(4k+3)}+\frac{2}{(4n+1)(4n+3)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{(4k+1)(4k+3)}\\
&= \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}\geq 0.
\end{aligned}$$

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \left(u_{n+1}+\frac{1}{4(n+1)-1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{4n-1}\right)\\
&= \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n-1}\\
&= \frac{2(4n-1)+(4n-1)(4n+1)-(4n+1)(4n+3)}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)}\\
&= \frac{8n-2+16n^2-1-16n^2-16n-3}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)}=\frac{-8n-6}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)}\leq 0.
\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4n-1}=0.$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et elles convergent vers une même limite.

2. Voici la procédure pour calculer u_n et v_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=0
for k=0:(n-1) do
     u=u+2/((4*k+1)*(4*k+3))
end
v=u+1/(4*n-1)
disp(v,u)
```

3. Voici la procédure pour calculer une approximation de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à ε près :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=2/3
v=1
n=1
while abs(v-u)>eps do
     n=n+1
     u=u+2/((4*(n-1)+1)*(4*(n-1)+3))
     v=u+1/(4*n-1)
end
disp(v,u)
```

Exercice 2 1. Voici la procédure pour calculer v_n et w_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
v=1
w=2
for k=1:n do
    x=v
    y=w
    v=2*x/3+y/3
    w=x/3+2*y/3
end
disp(w,v)
```

2. (a) $t_{n+1} = v_{n+1} - w_{n+1} = \left(\frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n\right) - \left(\frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n\right) = \frac{1}{3}(v_n - w_n) = \frac{1}{3}t_n$. Donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

   (b) Pour tout entier naturel n, $t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times t_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (v_0 - w_0) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   (c) D'après la question précédente :
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq 0$, donc $v_n - w_n \leq 0$, donc $v_n \leq w_n$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$).

3. (a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(w_n - v_n) \geq 0$ (avec la question 2.(c)).

   $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car : $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{3}(v_n - w_n) \leq 0$ (avec la question 1.(c)).

   (b) On a vu que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et, d'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ.

4. (a) Voici la procédure pour calculer une approximation de ℓ à ε près :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
v=1
w=2
while abs(w-v)>eps do
    x=v
    y=w
    v=2*x/3+y/3
    w=x/3+2*y/3
end
disp(w,v)
```

   (b) On teste pour différentes valeurs de ε :

```
-->exec('C:\TP8-Approximation de la limite de suites adjacentes\tp8cor3b.sce', -1)
Donner une valeur de epsilon: 10^-3
   1.4997713763146
   1.5002286236854

-->exec('C:\TP8-Approximation de la limite de suites adjacentes\tp8cor3b.sce', -1)
Donner une valeur de epsilon: 10^-6
    1.4999996863873
    1.5000003136127
```

   Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblent converger vers $\frac{3}{2}$.

5. (a) $s_{n+1} = v_{n+1} + w_{n+1} = \left(\frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n\right) + \left(\frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n\right) = v_n + w_n = s_n$ donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $s_0 = v_0 + w_0 = 1 + 2 = 3$.

(b) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $v_n + w_n = 3$. Donc, par passage à la limite, $\ell + \ell = 3$ et donc $\ell = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 3

1. Voici la procédure pour calculer a_n et b_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
a=1
b=2
for k=1:n do
    x=a
    y=b
    a=sqrt(x*y)
    b=(x+y)/2
end
disp(b,a)
```

2. Voici la procédure pour calculer une approximation de la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à ε près :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
a=1
b=2
while abs(b-a)>eps do
    x=a
    y=b
    a=sqrt(x*y)
    b=(x+y)/2
end
disp(b,a)
```