Correction du TP8

Vitesse de convergence d'une suite réelle

Exercice 1 1. Voici la procédure qui permet de calculer u_n, n étant un entier donné par l'utilisateur :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=2
for k=1:n do
    u=1/3*u+2
end
disp(u)
```

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On commence par résoudre l'équation suivante :

$$x = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

On considère alors la suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que c'est une suite géométrique :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3).$$

Ainsi, $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$. On a alors :

$$u_n - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (-1) \Leftrightarrow u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Comme $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

3. Voici la procédure permettant d'obtenir le plus petit entier n tel que $|u_n - 3| < \varepsilon$:

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=2
k=0
while abs(u-3)>=eps do
    k=k+1
    u=1/3*u+2
end
disp(k)
```

Exercice 2 1. Montrons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n.n!}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \\ &< 0. \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0.$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

2. Voici la procédure pour calculer les n-ièmes termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
u=2
v=3
for k=2:n do
    u=u+1/factorielle(k)
end
v=u+1/(n*factorielle(n))
disp(v,u)
```

3. Voici la procédure qui permet de calculer une approximation de ℓ à ε près :

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=2
v=3
n=1
while abs(u-v)>eps do
    n=n+1
    u=u+1/factorielle(n)
    v=u+1/(n*factorielle(n))
end
disp(v,u)
```

4. Voici la procédure qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - v_n| \leq \varepsilon$:

```
eps=input('Donner une valeur de epsilon: ')
u=2
v=3
n=1
while abs(u-v)>eps do
    n=n+1
    u=u+1/factorielle(n)
    v=u+1/(n*factorielle(n))
end
disp(n)
```

Exercice 3 1. Voici la procédure permettant de calculer v_n :

```
n=input('Donner une valeur de n: ')
a=3
b=5
for k=1:n do
    x=a
    y=b
    a=y
    b=4*y-3*x
end
disp(a)
```

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On commence par résoudre l'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Donc il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda 1^n + \mu 3^n = \lambda + \mu 3^n$.

Déterminons λ et μ avec les valeurs de v_0 et de v_1 :

$$\begin{cases} v_0 = 3 = \lambda + \mu 3^0 \\ v_1 = 5 = \lambda + \mu 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda + 3\mu = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 2\mu = 2 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 + 3^n$.

Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. La procédure suivante permet de déterminer le plus petit entier n tel que $v_n > A$:

```
A=input('Donner une valeur de A: ')
a=3
b=5
k=0
while a<A do
    k=k+1
    x=a
    y=b
    a=y
    b=4*y-3*x
end
disp(k)
```

Exercice 4

1. Pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \times \frac{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

en utilisant l'inégalité $\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}$ (car la fonction racine carrée est croissante) à la dernière inégalité.

2. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} u_n \geq \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \Leftrightarrow u_n \geq 2 \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$, on en déduit par passage à la limite dans l'inégalité obtenue à la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. Voici la procédure pour déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$:

```
u=1
n=1
while u<10^3 do
    n=n+1
    u=u+1/sqrt(n)
end
disp(n)
```