Correction - TP 8

Fonctions de deux variables

Exercice 1

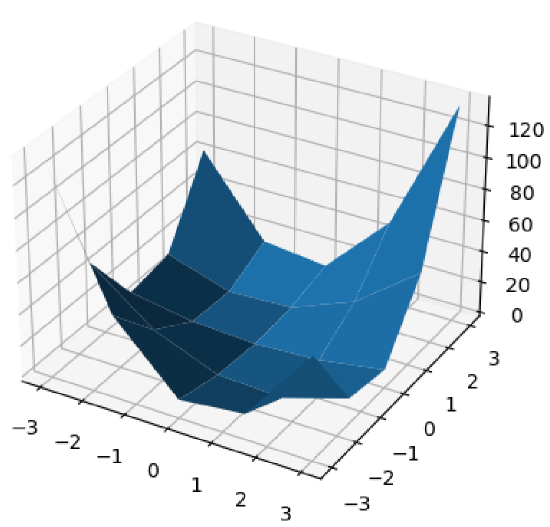
1. On utilise les instructions suivantes :

```python
def f(x,y):
    return((x**2)*(y**2)+x**2+y**2+4*x*y)
```

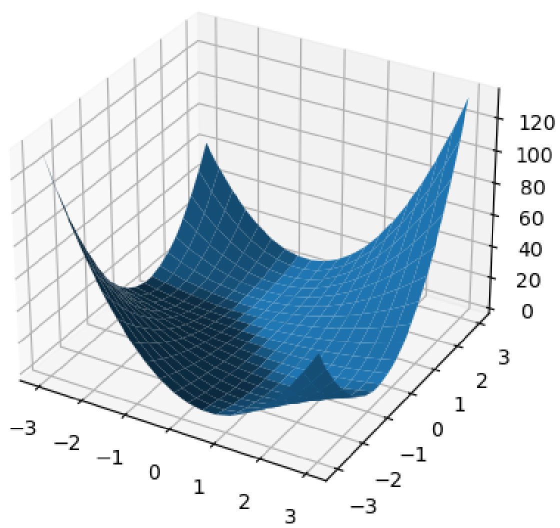
2. On utilise les lignes de commandes suivantes :

```python
n = int(input('Donner une valeur de n : '))
x = np.linspace(-3,3,n)
y=x
X,Y = np.meshgrid(x,y)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection = '3d')
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```

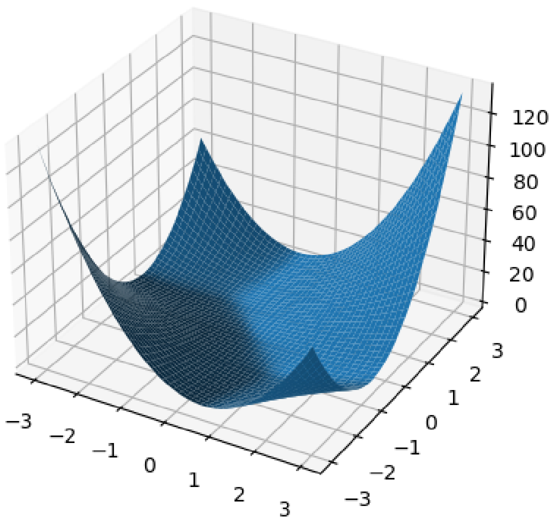
On teste pour $n = 5, 20, 50$ et 200 et on obtient :



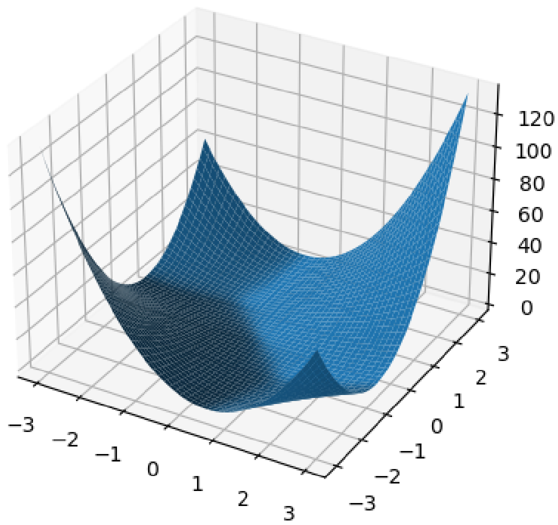
Pour $n = 5$



Pour $n = 20$



Pour $n = 50$



Pour $n = 200$

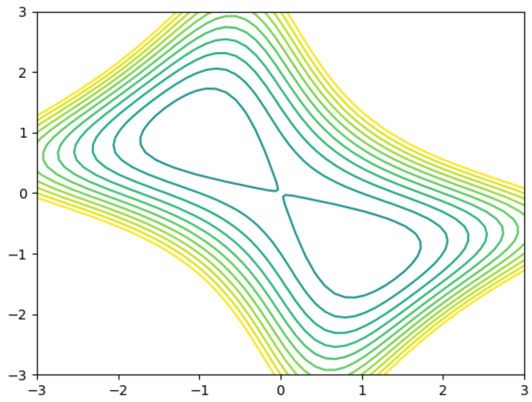
3. Il semble que f admette deux minimums locaux autour des points $(-1,1)$ et $(1,-1)$.

Exercice 2

1. On exécute les instructions suivantes (à la suite des instructions de l'exercice 1) :

```
L = [i for i in range(-10,11)]
plt.contour(X, Y, f(X, Y), L)
plt.show()
```

On obtient la figure suivante :

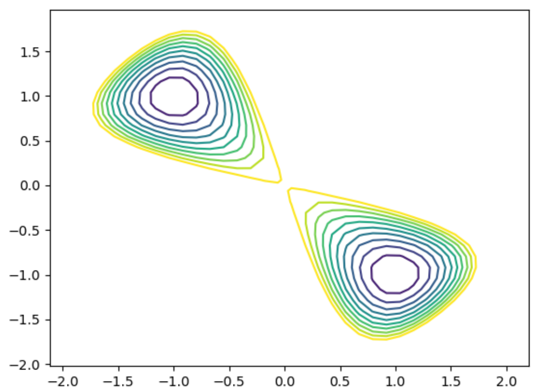


2. On remarque que la ligne de niveau 0 est atteinte et pas la ligne de niveau -1. Les minimums locaux ont donc une valeur comprise entre -1 et 0. Ils semblent être atteints aux points $(-1,1)$ et $(1,-1)$. Tout ceci confirme les observations faites à l'**Exercice 1**.

3. Comme les minimums sont entre -1 et 0, on trace les lignes de niveau entre -1 et 0 avec un pas de 0.1 :

```
L = [i/10 for i in range(-10,1)]
plt.contour(X, Y, f(X, Y), L)
plt.show()
```

et on obtient :

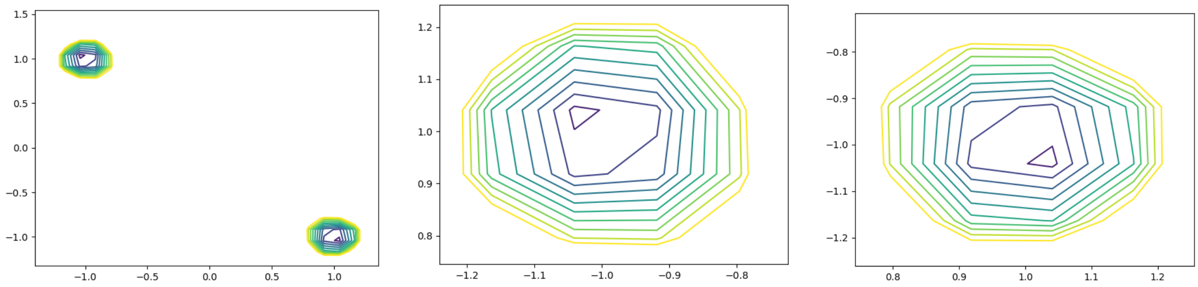


On remarque que les lignes de niveaux inférieures strictement à -0.9 ne sont pas atteintes, alors que la ligne de niveau -0.9 l'est. Les minimums locaux sont donc dans l'intervalle $[-1;-0,9]$.

Pour être encore plus précis, construisons alors des lignes de niveau espacées de 10^{-2} dans l'intervalle $[-1;-0,9]$ pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près des minimums locaux de f :

```
L = [i/100 for i in range(-100,-89)]
plt.contour(X, Y, f(X, Y), L)
plt.show()
```

et on obtient (en zoomant) :



f semble avoir deux minimums locaux atteints en $(-1, 1)$ et $(1, -1)$ qui sont tous les deux égaux à $\simeq -1$.

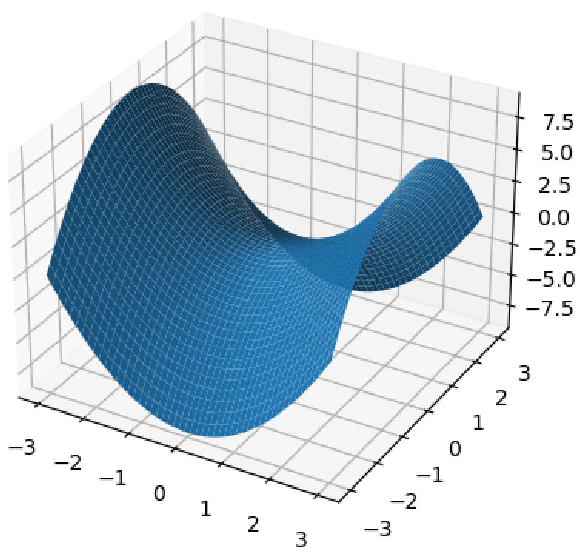
Exercice 3

1. On utilise les instructions suivantes :

```
def f(x,y):
    return(x^2-y^2)

x = np.linspace(-3,3,50)
y = x
X,Y = np.meshgrid(x,y)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection = '3d')
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```

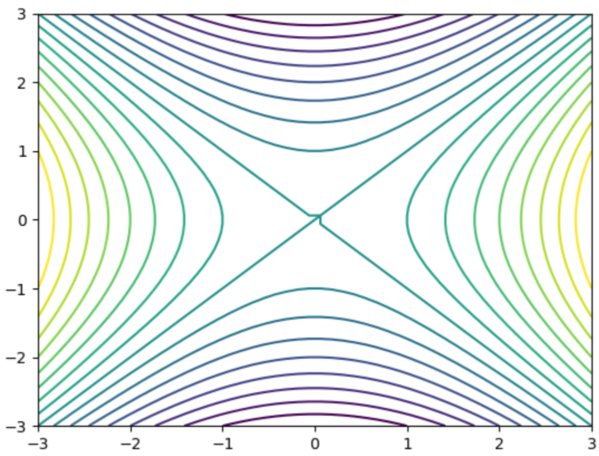
On obtient la figure suivante :



2. On utilise les instructions suivantes (à la suite des précédentes) :

```
L = [i for i in range(-8,9)]
plt.contour(X,Y,f(X,Y),L)
plt.show()
```

On obtient la figure suivante :



On remarque que la courbe de f n'a pas d'extremum local sur $[-3,3]^2$. En revanche, il semble qu'au point de coordonnées $(0,0)$, la courbe admette un point critique. En effet, si on ne fait varier que x ($y=0$ restant constante), la courbe a un maximum local en 0 selon cette direction donc $\partial_1(f)(0,0)=0$. De même, si on ne fait varier que y ($x=0$ restant constante), la courbe a un maximum local en 0 selon cette direction donc $\partial_2(f)(0,0)=0$. Le point de coordonnées $(0,0)$ est alors appelé un point selle.

3. Dérivées partielles premières :

   $\partial_1(f)(x,y)=2x$ et $\partial_2(f)(x,y)=-2y$.

   Dérivées partielles secondes :

   $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=2$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=0$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=-2$.

4. Les points critiques sont les solutions du système d'équations :

$$\nabla(f)(x,y)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=0.$$

   L'unique point critique de f est le point de coordonnées $(0,0)$ ce qui coïncide avec nos observations graphiques. Calculons la matrice hessienne en ce point :

$$\nabla^2(f)(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Les valeurs propres de la matrice hessienne de f en $(0,0)$ sont donc -2 et 2. Elles sont de signe opposé donc on a prouvé que f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$ donc f n'a finalement aucun extremum local.

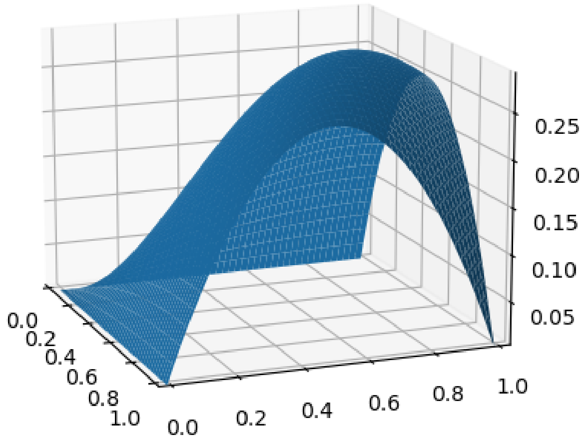
Exercice 4

1. On utilise les instructions suivantes :

```python
def f(x,y):
    return(x*y*(2-x-y))

x = np.linspace(0,1,50)
y = x
X,Y = np.meshgrid(x,y)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection = '3d')
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```

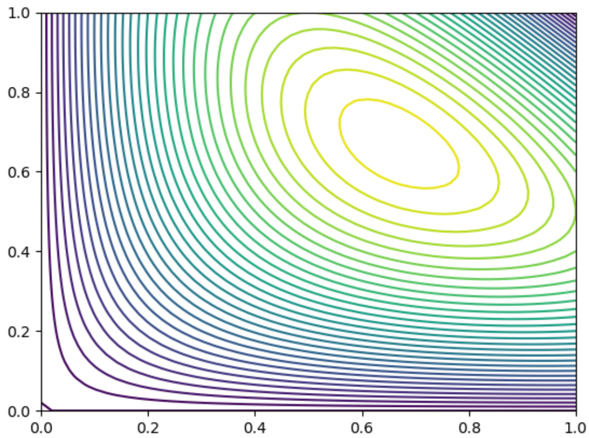
   On obtient la figure suivante :



2. On remarque que f semble avoir un maximum local sur le domaine $]0,1[^2$.
   On remarque également que les valeurs prises par f sont comprises entre 0 et $0,3$.
3. On utilise les instructions suivantes :

```python
L = [i/100 for i in range(0,31)]
plt.contour(X,Y,f(X,Y),L)
plt.show()
```

   On obtient la figure suivante :



   L'extremum local est compris dans l'intervalle $[0,29;0,3]$ donc $m \simeq 0,3$ est une valeur approchée de m à 10^{-2} près.
   Une valeur approchée du point $(x_0;y_0)$ en lequel l'extremum est atteint est $(0,6;0,7)$.
4. Dérivées partielles premières :
   $\partial_1(f)(x,y) = y(2-2x-y)$ et $\partial_2(f)(x,y) = x(2-2y-x)$.
   Dérivées partielles secondes :
   $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -2y$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 2-2x-2y$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -2x$.
5. Les points critiques de f sont les solutions du système d'équations :

$$\nabla(f)(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y(2-2x-y) & = & 0 \\ x(2-2y-x) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2-2x-y & = & 0 \\ 2-2y-x & = & 0 \end{array} \right. \text{car } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y & = & 2 \\ x+2y & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y & = & 2 \\ y & = & \dfrac{2}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}.$$

   Ainsi, f admet un point critique de coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Déterminons la matrice hessienne en ces points :

$$\nabla^2(f)(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

6. Dans la console :

```
>>> A = np.array([[-4/3, -2/3], [-2/3, -4/3]])
>>> Sp, VP = al.eig(A)
>>> print(Sp)
[- 2.   - 0.6666667]
```

Les valeurs propres de A sont de même signe donc f a bien un extremum local au point de coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ et comme les valeurs propres sont négatives, il s'agit d'un maximum local.
Ce maximum local vaut $m = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{8}{27} \simeq 0,2963$. Tout coïncide bien avec les observations graphiques.

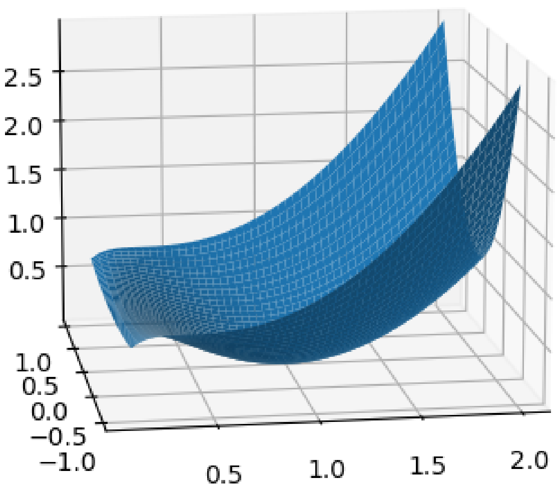
Exercice 5

1. On utilise les instructions suivantes :

```python
def f(x,y):
    return(x*(np.log(x)**2+y**2))

x = np.linspace(0.1,2,50)
y = np.linspace(-1,1,50)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection = '3d')
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```

On obtient la figure suivante :



2. La courbe de f semble avoir un minimum local au point de coordonnées $(1, 0)$ valant à peu près 0.

3. Dérivées partielles premières :
$\partial_1(f)(x, y) = \ln(x)^2 + y^2 + 2\ln(x)$ et $\partial_2(f)(x, y) = 2xy$.
Dérivées partielles secondes :
$\partial^2_{1,1}(f)(x, y) = \dfrac{2}{x}\ln(x) + \dfrac{2}{x}$, $\partial^2_{1,2}(f)(x, y) = \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = 2y$, $\partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 2x$.

4. Les points critiques de f sont les solutions du système d'équations :

$$\nabla(f)(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \ln(x)^2 + y^2 + 2\ln(x) & = & 0 \\ 2xy & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \ln(x)^2 + 2\ln(x) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \ln(x)(\ln(x) + 2) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & e^{-2} \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, f admet deux points critiques de coordonnées $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$. Déterminons la matrice hessienne en ces points :

$$\nabla^2(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \nabla^2(f)(1,e^{-2}) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

5. Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$ sont de même signe et positives donc f admet un minimum local en $(1,0)$ valant $f(1,0)=0$.

   Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,e^{-2})$ sont de signe opposés donc f n'a pas d'extremum local en $(1,e^{-2})$.

   Ces calculs coïncident donc avec les observations graphiques.

Exercice 6

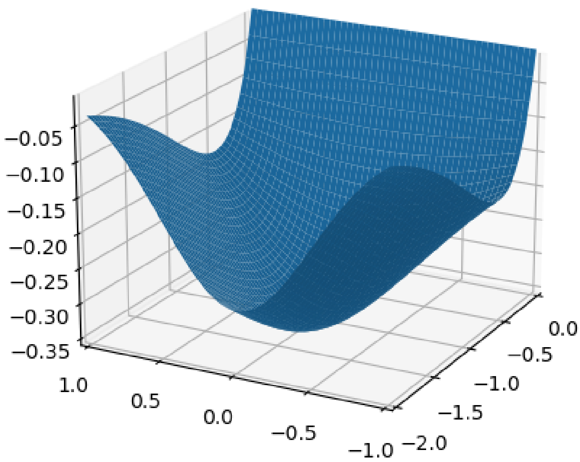
1. On utilise les instructions suivantes :

```
def f(x,y):
    return(x*np.exp(x*(y**2+1)))

x = np.linspace(-2,0,50)
y = np.linspace(-1,1,50)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection = '3d')
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()


x=linspace(-2,0,50)
y=linspace(-1,1,50)
fplot3d(x,y,f)
```

   On obtient la figure suivante :



2. La courbe de f semble avoir un minimum local au point de coordonnées $(-1,0)$ valant à peu près $-0,35$.

3. Dérivées partielles premières :

   $\partial_1(f)(x,y) = (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}$ et $\partial_2(f)(x,y) = 2x^2ye^{x(y^2+1)}$.

   Dérivées partielles secondes :

   $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = (y^2+1)e^{x(y^2+1)} + (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4xye^{x(y^2+1)} + 2x^2y(y^2+1)e^{x(y^2+1)}$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)2x^2e^{x(y^2+1)} + 4x^3y^2e^{x(y^2+1)}$.

4. Les points critiques de f sont les solutions du système d'équations :

$$\nabla(f)(x,y)=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} & = & 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1+x(y^2+1) & = & 0 \\ 2x^2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, f admet un unique point critique de coordonnées $(-1, 0)$. Déterminons la matrice hessienne en ce point :

$$\nabla^2(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 1/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}.$$

5. Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(-1, 0)$ sont de même signe et positives donc f admet un minimum local en $(-1, 0)$ valant $f(-1, 0) = -1/e \simeq -0,368$. Les calculs coïncident donc avec les observations graphiques.