Correction du TP 9

Simulation de variables aléatoires à densité

Exercice 1

En suivant le résultat rappelé, on obtient la fonction suivante :

```
function v = uniforme(a,b)
    u = rand()
    v = (b-a)*u+a
endfunction
```

Exercice 2

1. En utilisant le premier point de la propriété précédente :

```
function x = norcentreereduite()
    u = rand(1,12)
    x = sum(u)-6
endfunction
```

2. En utilisant le deuxième point de la propriété précédente :

```
function y = normale(m, v)
    x = norcentreereduite()
    y = sqrt(v)*x+m
endfunction
```

3. On peut procéder ainsi :

```
function Y = Normale(N,m,v)
    Y = zeros(1,N)
    for k = 1:N do
        Y(k) = normale(m,v)
    end
endfunction
```

Exercice 3

1. D'après le cours, $F_U : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

2. Posons $Y = F^{-1}(U)$. On a $Y(\Omega) = F^{-1}(]0,1[) =]a,b[= X(\Omega)$. Et pour tout $x \in]a,b[$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) \underset{F \text{ croissante}}{=} P(U \leq F(x)) = F_U(F(x)) \underset{F(x) \in]0,1[}{=} F(x).$$

Les fonctions de répartitions de X et Y sont égales : elles suivent donc la même loi.

Exercice 4

1. Notons F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On a :

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante sur cet intervalle (car F est dérivable et $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$) et on a $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Par le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0,1[$.

Déterminons F^{-1} :$]0,1[\to\mathbb{R}_+^*$. Soit pour cela $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $y\in]0,1[$. On résout :

$$y=F(x)\Leftrightarrow y=1-e^{-\lambda x}\Leftrightarrow e^{-\lambda x}=1-y$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$$

Ainsi on a $F^{-1}:y\in]0,1[\to-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$.

2. (a) En utilisant le principe d'inversion :

```
function e = exponentielle(lambda)
    u = rand()
    e = -(1/lambda)*log(1-u)
endfunction
```

(b) En adaptant la fonction `Normale` ici :

```
function E = Exponentielle(N,lambda)
    E = zeros(1,N)
    for k = 1:N do
        E(k) = exponentielle(lambda)
    end
endfunction
```

3. (a) On utilise la ligne de commande `E = Exponentielle(10000, 0.5)`.

(b) On utilise les instructions suivantes :

```
m=mean(E)
v=mean(E.^2)-mean(E)^2
disp(m)
disp(v)
```

On obtient ici `2.0946536` et `4.191805`.

C'est bien conforme à ce qu'on attend, puisque l'espérance et la variance d'une loi $\mathcal{E}(1/2)$ sont égales respectivement à 2 et 4.

Exercice 5

On procède ainsi :

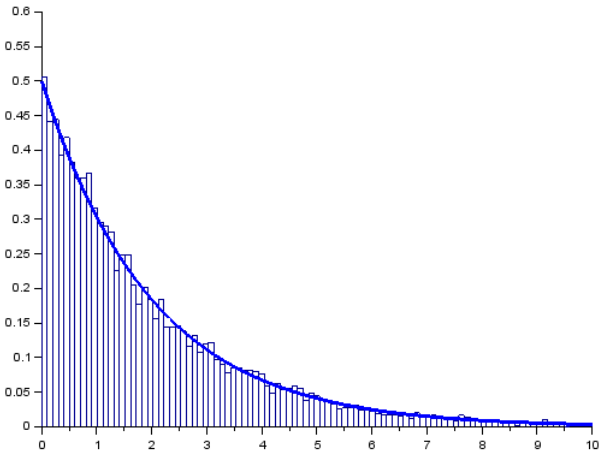
```
//Echantillon de taille N = 10000
E = Exponentielle(10000,0.5)

//Courbe représentative de la densité
function y =f(x)
    y = 0.5*exp(-0.5*x)
endfunction

x =linspace(0,10,100)
fplot2d(x,f)

//Histogramme des fréquences
c = linspace(0,10,100)
histplot(c,E)
```

On obtient :



On observe graphiquement que les aires des rectangles formant l'histogramme des fréquences sont proches des aires délimitées par la courbe représentative de la densité. On peut donc conclure que `Exponentielle(0.5)` renvoie bien des simulations suivant la loi $\mathcal{E}(0.5)$.

Exercice 6

1. Rappelons que la commande `tabul(x,"i")` trie la série statistique `x` par modalités croissantes. Plus précisément, `y` est un tableau à deux colonnes. La première colonne `y(:,1)` contient les modalités croissantes, et la deuxième `y(:,2)` contient les effectifs de chaque modalité. Comme ici on simule des lois continues, `y(:,2)` contient en pratique que des 1. La commande `cumsum(y(:,2))` contient alors les effectifs cumulés pour les modalités, et `cumsum(y(:,2))/length(x)` les fréquences cumulées.

   La commande `plot2d2(y(:,1),cumsum(y(:,2)/length(x)))` trace une fonction en escaliers dont les ¡¡ marches ¿¿ sont d'abscisse `y(:,1)`, c'est-à-dire les modalités de `x`, et d'ordonnée `cumsum(y(:,2))/length(x)` les fréquences cumulées. Il s'agit donc précisément de la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon `x`.

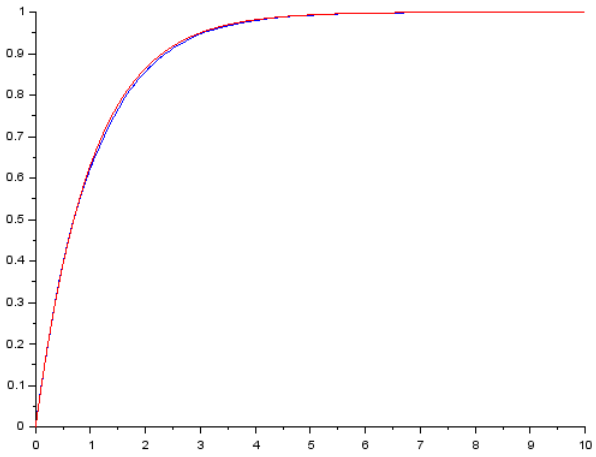
2. On le fait avec la commande `E = Exponentielle(10000,1)`.

3. On utilise le code suivant :

```
//Fonction de répartition empirique
y = tabul(E,"i")
plot2d2(y(:,1),cumsum(y(:,2))/length(E),2)

//Fonction de répartition théorique
function y = F(x)
    y = 1-exp(-x)
endfunction
x = linspace(0,10,100)
fplot2d(x,F,5)
```

   On obtient :



Ces fonctions sont très proches l'une de l'autre, notre simulation semble donc pertinente.

Exercice 7

1. On entre dans la console :

```
-->[P1,Q1] = cdfnor("PQ",0,0,1)
 Q1  =
    0.5
 P1  =
    0.5
-->[P2,Q2] = cdfnor("PQ",1,0,1)
 Q2  =
    0.1586553
 P2  =
    0.8413447
-->[P3,Q3] = cdfnor("PQ",1.96,0,1)
 Q3  =
    0.0249979
 P3  =
    0.9750021
```

   On obtient respectivement les valeurs `0.5`, `0.8413447` et `0.9750021`.

2. Pour calculer $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \Phi_{3,2}(10)$, on entre dans la console :

```
-->[P,Q]=cdfnor("PQ",10,3,2)
 Q  =
    0.0002326
 P  =
    0.9997674
```

   On obtient que $P(X > 10) \simeq 0.0002326$.

   Pour calculer $P(0 \leq X < 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 0) = \Phi_{3,2}(4) - \Phi_{3,2}(0)$, on entre dans la console :

```
-->[P1,Q1]=cdfnor("PQ",4,3,2)
 Q1  =
    0.3085375
 P1  =
    0.6914625
-->[P2,Q2]=cdfnor("PQ",0,3,2)
 Q2  =
    0.9331928
 P2  =
    0.0668072
-->P1-P2
 ans  =
    0.6246553
```

On obtient que $P(0 \leq X < 4) \simeq 0.6246553$.

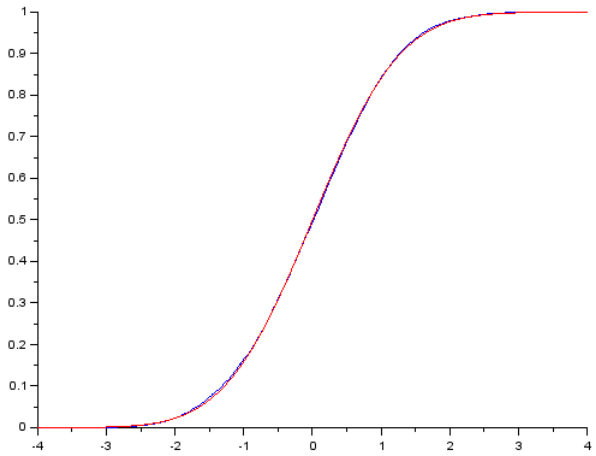
3. (a) Pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$, avec un échantillon de taille $N = 10000$:

```
//Echantillon
E = Normale(10000,0,1)

//Fonction de répartition empirique
y = tabul(E,"i")
plot2d2(y(:,1),cumsum(y(:,2))/length(C),2)

//Fonction de répartition théorique
function y = F(x)
    [P,Q] = cdfnor("PQ",x,0,1)
    y = P
endfunction
x = linspace(-4,4,100)
fplot2d(x,F,5)
```

On obtient :



Ainsi la simulation de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ par la fonction `Normale` semble pertinente.

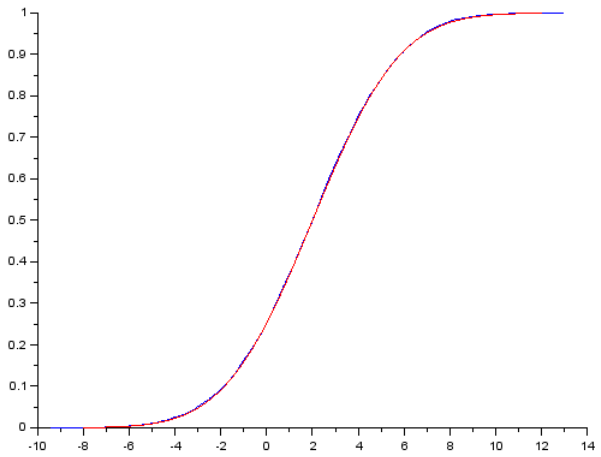
(b) De même pour la loi $\mathcal{N}(2,9)$:

```
//Echantillon
E = Normale(10000,2,9)

//Fonction de répartition empirique
y = tabul(E,"i")
plot2d2(y(:,1),cumsum(y(:,2))/length(C),2)

//Fonction de répartition théorique
function y = F(x)
    [P,Q] = cdfnor("PQ",x,2,3)
    y = P
endfunction
x = linspace(-8,12,100)
fplot2d(x,F,5)
```

On obtient :



Là aussi, notre simulation semble pertinente.

Exercice 8

1. Sur $X(\Omega) =]1;+\infty[$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ donc F est dérivable et $F'(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$.

   F est ainsi continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;1[$.

2. Soit $y \in]0;1[$ fixé. Résolvons l'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in]1;+\infty[$:

$$F(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 - y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \text{ car } x > 0.$$

   Ainsi, $\forall y \in]0;1[$, $F^{-1}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y}}$.

3. Voici les instructions demandées :

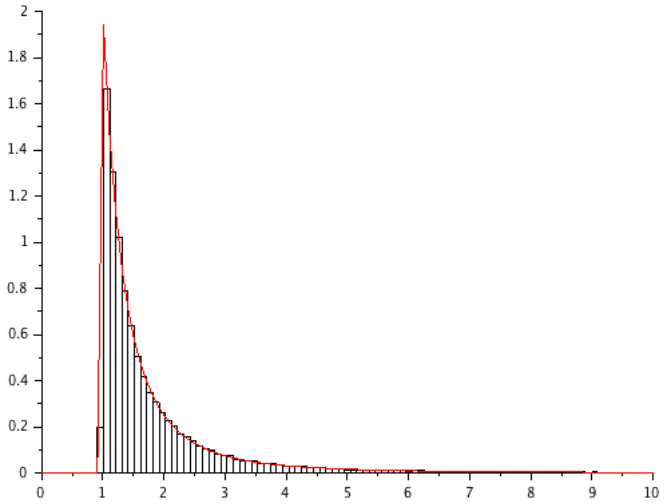
```
clf
n=input('Entrer la longueur de l''échantillon : ')
U=rand(1,n)
X=1 ./ sqrt(1-U)
x=linspace(0,10,100)
histplot(x,X)
```

4. Voici les instructions demandées :

```
function y=f(x)
  if x<1 then
    y=0
  else
    y=2 ./ x.^3
  end
endfunction

fplot2d(x,f,style=5)
```

On obtient alors la représentation graphique :



La loi empirique de la variable X simulée par la méthode d'inversion coïncide bien avec la loi théorique souhaité.

Exercice 9

1. Sur $X(\Omega) =]0;\ln(2)[$, $F(x) = 2(1-e^{-x})$ donc F est dérivable et $F'(x) = 2e^{-x} > 0$.

   F est ainsi continue et strictement croissante sur $]0;\ln(2)[$. Elle réalise donc une bijection de $]0;\ln(2)[$ dans $]0;1[$.

2. Soit $y \in]0;1[$ fixé. Résolvons l'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in]0;\ln(2)[$:

$$F(x) = y \Leftrightarrow 2(1-e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^{-x} = 1 - \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = -\ln\left(1-\frac{y}{2}\right).$$

   Ainsi, $\forall y \in]0;1[$, $F^{-1}(y) = -\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)$.

3. Voici les instructions demandées :

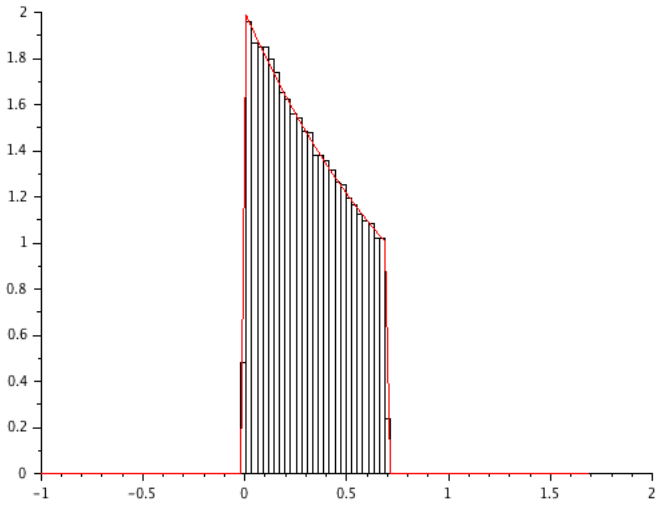
```
clf
n=input('Entrer la longueur de l''échantillon : ')
U=rand(1,n)
X=-log(1-U/2)
x=linspace(-1,log(2)+1,100)
histplot(x,X)
```

4. Voici les instructions demandées :

```
function y=f(x)
  if x<0 then
    y=0
  elseif x>log(2) then
    y=0
  else
    y=2*exp(-x)
  end
endfunction

fplot2d(x,f,style=5)
```

On obtient alors la représentation graphique :



La loi empirique de la variable X simulée par la méthode d'inversion coïncide bien avec la loi théorique souhaitée.