DM 0

A rendre le Jeudi 1 Septembre

Exercice 1

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^{3/5} \times b_n^{2/5} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n^{2/5} \times b_n^{3/5}$$

On suppose $b_0 > a_0 > 0$. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \ln(a_n)$ et $v_n = \ln(b_n)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

2. On pose $t_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n et de t_0.
   (c) Montrer que $t_0 \leq 0$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.
3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ.
   (b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune L strictement positive.
5. (a) Montrer que la suite $w_n = a_n b_n$ est constante.
   (b) En déduire que $L = \sqrt{a_0 b_0}$.
   (c) On suppose dans cette question que $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.
   Compléter le programme Python suivant pour que, étant donné $\varepsilon > 0$, il calcule et affiche une approximation de $L = \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{2}$ à ε près :

```python
epsilon = input("Donner une valeur pour epsilon")
a = 1
b = 2
while ..... :
  x = .....
  y = .....
  a = .....
  b = .....
print(a,b)
```

Exercice 2

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Construire une procédure Python qui, étant donné un entier naturel n, permet de calculer et d'afficher u_n et v_n.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

3. (a) Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.

   (c) Construire une procédure Python qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet d'obtenir une approximation de ℓ avec une précision ε.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $w_k = v_k - u_k$ et on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$.

   (a) Exprimer S_n en fonction de n, à l'aide de la question 2.(b).

   (b) Vérifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $w_k = \dfrac{u_k - u_{k-1}}{2}$.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

   (c) Avec les deux questions précédentes, exprimer u_n en fonction de n, puis en déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

   On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f, puis les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}_f$?

   (b) Étudier les variations de f.

   (c) Calculer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0.

   (d) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T. Préciser les points d'intersection.

   (e) Tracer $\mathscr{C}_f$ et T dans un même repère orthonormé.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f(\dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

   (b) En déduire, par récurrence et à l'aide de la question 2.(b) que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(c) i. Montrer que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.

ii. Vérifier que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

iii. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

(d) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$$

(e) A l'aide de la question précédente et de la question 2.(b), donner un encadrement de nu_n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} nu_n$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(e^x + 2x - 1)$$

On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Considérons la fonction $g(x) = e^x + 2x - 1$.

   (a) Étudier les variations de g.
   On précisera les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2. (a) Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale ou horizontale.

   (c) Étudier les variations de f.

   (d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathscr{D}_f$, que l'on notera α.

   (e) Vérifier que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser l'approximation $e^{1/4} \simeq 1.28$).

3. Asymptote en $+\infty$.

   (a) Déterminer le réel a tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.

   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ et en déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique, notée Δ, au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.

   (c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ dans un même repère orthonormé.

Exercice 5

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Écrire une procédure Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule et affiche S_n.

2. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x. \tag{1}$$

   (a) On considère la fonction $f(x) = x - \ln(1+x)$.
   Étudier les variations de f et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On considère la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

Étudier les variations de g et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En déduire les inégalités (1).

3. Soit n un entier naturel non nul.

(a) En utilisant les inégalités (1), montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}. \tag{2}$$

(b) En sommant les inégalités (2), en déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

4. (a) Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

5. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Faire le lien entre les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.