DM 1

A rendre le Jeudi 2 Septembre

Exercice 1

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^{3/5} \times b_n^{2/5} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n^{2/5} \times b_n^{3/5}$$

On suppose $b_0 > a_0 > 0$. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \ln(a_n)$ et $v_n = \ln(b_n)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

2. On pose $t_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n et de t_0.
   (c) Montrer que $t_0 \leq 0$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$.

3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ.
   (b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune L strictement positive.

5. (a) Montrer que la suite $w_n = a_n b_n$ est constante.
   (b) En déduire que $L = \sqrt{a_0 b_0}$.
   (c) On suppose dans cette question que $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.
   Compléter le programme Scilab suivant pour que, étant donné $\varepsilon > 0$, il calcule et affiche une approximation de $L = \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{2}$ à ε près :

```
epsilon=input('Donner une valeur pour epsilon')
a=1
b=2
while ... do
    x=...
    y=...
    a=...
    b=...
end
disp(b,a)
```

Exercice 2

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

1. (a) On pose $f(x) = \ln(1+x) - x$. Dresser le tableau de variation de f.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.
   (c) Écrire les commandes en langage Scilab permettant de tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$.
2. (a) En utilisant la question 1.(b) avec $x = -\dfrac{1}{n+1}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. (a) En utilisant la question 1.(b) avec $x = \dfrac{1}{n+1}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0.$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite ℓ.
   (c) Compléter le programme Scilab suivant pour que, étant donné $\varepsilon > 0$, il calcule et affiche une approximation de ℓ à ε près :

```
epsilon=input('Donner epsilon : ')
n=1
S=1
u=.....
v=.....
while ..... do
    n=.....
    S=S+1/n
    u=.....
    v=.....
end
disp(v,u)
```

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 1$.
   (b) Démontrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ, alors $\ell = 1$.

   Les deux prochaines questions sont consacrées à l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On propose deux approches différentes.
2. Première méthode :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

(b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. Deuxième méthode :

(a) Déterminer le signe de $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x} - x$ selon les différentes valeurs de x.

(b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et expliciter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. Informatique :

(a) Écrire une procédure Scilab qui, étant donné un entier naturel n donné, calcule u_n.

(b) Écrire une procédure Scilab qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - 1| \leq \varepsilon$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(e^x + 2x - 1)$$

On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Considérons la fonction $g(x) = e^x + 2x - 1$.

(a) Étudier les variations de g.
On précisera les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

(b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2. (a) Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

(b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale ou horizontale.

(c) Étudier les variations de f.

(d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathscr{D}_f$, que l'on notera α.

(e) Vérifier que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (on pourra utiliser l'approximation $e^{1/4} \simeq 1.28$).

3. Asymptote en $+\infty$.

(a) Déterminer le réel a tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ et en déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique, notée Δ, au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.

(c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ dans un même repère orthonormé.

Exercice 5

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, ainsi que par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}. \tag{1}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et que $0 < u_n < v_n$.

2. Construire une procédure en langage Scilab qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, calcule u_n et v_n.

3. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_1.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire qu'elle converge vers une limite finie qu'on notera ℓ_2.
   (c) Justifier que $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2$.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = 1$.
   (b) En déduire que $\ell_2 = 1 + \ell_1$.
   (c) En passant à la limite dans les relations (1), montrer que $\ell_1 = 0$ puis que $\ell_2 = 1$.