

A rendre le Mardi 9 Janvier

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n .
2. Calculer u_0 et u_1 .
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$.
 (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 (c) Donner la limite de la suite (u_n) .

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

- (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n .
- (b) Montrer que : $\forall n \geq 2, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$.
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Exercice 2

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n .
 (b) En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. (a) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.
 (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

- (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$.

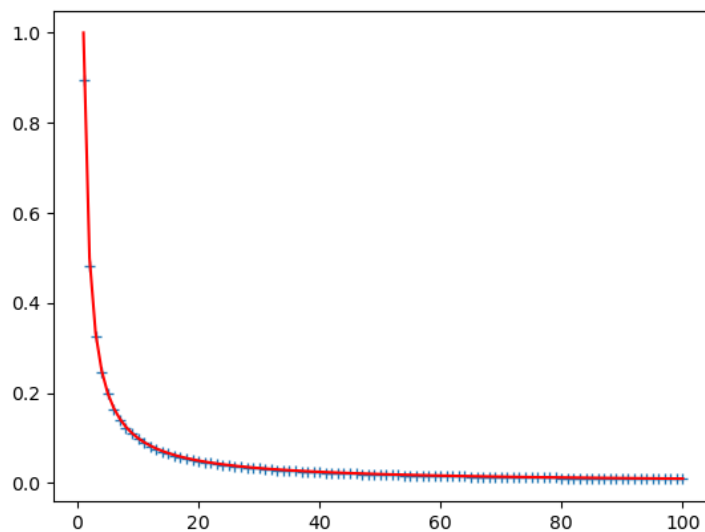
4. On considère le programme suivant :

```

1 | k = np.arange(1,1001)
2 | U = np.exp(np.ones(1000)/k)/(k**2)
3 | S = np.cumsum(U)
4 | R = S[-1]*np.ones(1000) - S
5 | plt.plot(k[0,100], R[0:100], '+')
6 | plt.plot(k[0,100], np.ones(100)/k[0:100], color="red")
7 | plt.show()

```

- Donner la valeur mémorisée dans la colonne d'indice n de la matrice ligne U .
- En déduire la somme mémorisée dans la colonne d'indice n de la matrice ligne S .
- En déduire la somme mémorisée dans la colonne n de la matrice ligne R .
- On exécute ce programme, on obtient le graphique :



Quel résultat de l'exercice est illustré par ce graphique ?

Exercice 3

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n x^k$ puis en dérivant des deux côtés l'égalité obtenue, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$. On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q . On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile" ;
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement "on obtient Pile (respectivement Face) au k -ième lancer".

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Pile obtenus et enfin Y_n le nombre de Face obtenus.

On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.

2. Loi de T_n .

- (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.
- (b) Déterminer $P(T_n = n)$.
- (c) Vérifier que : $\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$.
- (d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

3. Loi de X_n .

- (a) Donner la loi de X_n .
- (b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

4. Loi de Y_n .

- (a) Déterminer, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
- (b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
- (c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E(Y_n)$.

5. (a) Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme Python suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n :

```

1 | def simul(n,p):
2 |     t = 0
3 |     x = 0
4 |     y = 0
5 |     while (x==0) and (t<n):
6 |         t = .....
7 |         if rd.random()>p:
8 |             y = .....
9 |         else:
10 |             x = .....
11 |     return [t, x, y]
```

- (b) On considère la fonction suivante :

```

1 | def loi_theorique(n, p):
2 |     L = [p]
3 |     for k in range(1,n-1):
4 |         L.append((1-p)*L[-1])
5 |         L.append(((1-p)/p)*L[-1])
6 |     return L
```

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, donner la valeur p_k mémorisée dans la case $L[k]$ de la liste L , puis donner la valeur p_{n-1} mémorisée dans $L[n-1]$.

Cette fonction renvoie en sortie la loi d'une variable aléatoire. Laquelle ?

(c) On rajoute à la suite de ces fonctions le programme suivant :

```

1 | n = 10
2 | p = 1/3
3 | T = []
4 | for k in range(1000):
5 |     [t, x, y] = simul(n,p)
6 |     T.append(t)
7 | E = [T.count(i) for i in range(1,11)]
8 | print(E)

```

Après exécution, on obtient le résultat suivant :

[320, 222, 156, 81, 73, 55, 26, 23, 19, 25]

Que fait ce programme ? Donner la valeur de la fréquence de l'évènement $[T_n = 5]$ obtenue pour ces 1000 simulations de T_n .

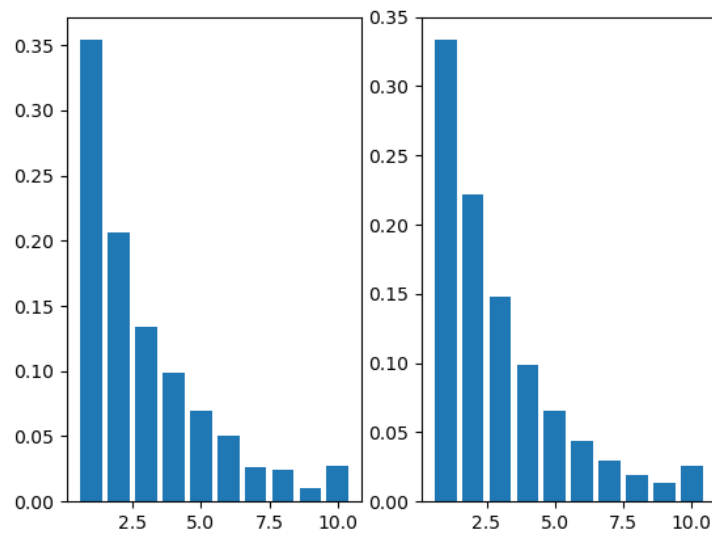
(d) On rajoute à la suite des instruction suivantes :

```

1 | x = list(range(1,n+1))
2 | f = [E[i]/1000 for i in range(10)]
3 | plt.subplot(1, 2, 1)
4 | plt.bar(x, f)
5 | plt.subplot(1, 2, 2)
6 | plt.bar(x, loi_theorique(n, p))
7 | plt.show()

```

On obtient les 2 graphiques suivants :



Commenter les graphiques obtenus.