DM 12

A rendre le Vendredi 26 Janvier

Exercice 1

1. **Étude préliminaire**

On admet, pour tout entier k et pour tout $x \in [0,1[$ que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

(a) Vérifier, pour tout réel $x \in [0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n < k$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(c) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

(d) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1[\qquad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. **Étude d'une expérience aléatoire**

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance .

(b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{N=n}(X=k)$.

(c) Vérifier que : $P(X=0) = \frac{4}{9}$.

(d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(X=k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

(e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

(f) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X \leq k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

(g) Écrire en `Python` une fonction `simulX()` qui simule une fois cette expérience et renvoie en sortie la valeur x prise par la variable X.

3. **Étude d'une variable à densité**

On note $a = -\dfrac{\ln(9) - \ln(5)}{\ln(9) - \ln(4)}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{4}{9}\right)}$.

(a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité, notée Y.

(b) Déterminer une densité f de Y.

(c) Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\, e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

(d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

2. Établir que f est impaire.

3. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2).$$

   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.

   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5. (a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

   (b) Déterminer la dérivée de la fonction $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

   (c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

   (a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt.$$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3.$$

(c) Conclure que : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

(d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :
   $$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$
6. Écrire un programme en `Python` permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}, par méthode de dichotomie.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question 5. On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

7. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
8. Montrer que X admet une espérance $E(X)$.
9. Démontrer que pour $x > \alpha$:
   $$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$$
   En déduire que l'espérance de X est donnée par :
   $$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$
   Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.
10. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?
