DM 13

A rendre le Jeudi 6 Février

Exercice 1

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Partie I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. Montrer que : $A^3 = 2A$
4. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9. Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
10. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
11. (a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
    (b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. (a) Montrer que $ker(f) = Vect(u)$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? On répondra à cette question sans faire le moindre calcul.
2. (a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la 2-ième coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.
   (b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 2-ième coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.
   (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
3. (a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$.
   (b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}.
   En déduire que, pour tout entier $k \geq 3$, on a : $A^k = 0$.
4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).
   (a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = Vect(I, N, N^2)$.
   On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$.
   En déduire que $C_A = Vect(I, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)dt.$
   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1.$
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.
2. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient :

$$E(X_n) = n + 1 \quad \text{et} \quad V(X_n) = n + 1.$$

   (b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes :

$$\int_0^4 f_4(t)\ dt \simeq 0,37 \qquad \int_0^6 f_4(t)\ dt \simeq 0,71 \qquad \int_0^8 f_4(t)\ dt \simeq 0,90$$

   Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4.
   Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leq 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.

   On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

   (a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t.
   Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0.

   (b) Soient $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leq t)$ et de l'événement $(Y_t \geq n)$.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.
