DM 14

A rendre le Vendredi 16 Février

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a.$$

I. Recherche des valeurs propres de f_a.

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de M_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q.

2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q.

3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a.

4. Lorsque $a = 1$, la matrice M_1 est-il diagonalisable ?

II. Réduction de la matrice M_a.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.
Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

5. Prouver que $\mathscr{B}'$ est une base de E et déterminer la matrice de passage, qu'on notera P_a, de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

6. Exprimer $f_a(e'_1)$ en fonction de e'_1.

7. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a, c'est-à-dire :
$$f_a(F) \subset F$$

8. Donner l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

9. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
où, par convention, on pose $T_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III. Étude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0, \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

10. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

11. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

12. Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de P_2 puis exprimer u_n en fonction de n.

13. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

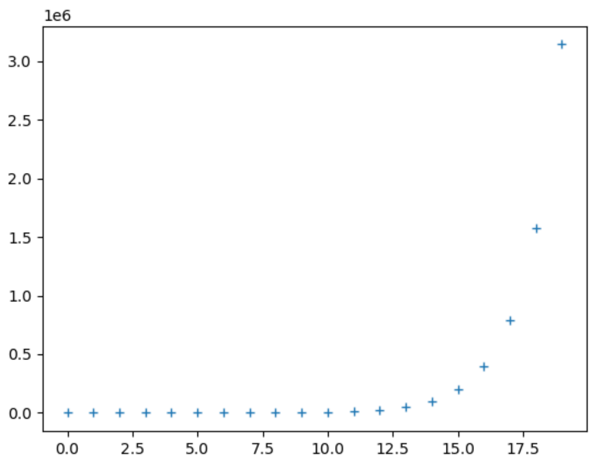
14. (a) Compléter le programme `Python` suivant de manière à ce que, pour tout $n \in [\![1, 20]\!]$, la n-ième colonne de la matrice X contienne la valeur du vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$:

```python
M = np.array([[4, -5, 2], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
X = np.zeros((3,20))
X[0, 0] = 7
X[2, 0] = -1
for n in range(1,20):
    X[:, n] = .....
```

(b) On ajoute à la fin du programme les commandes

```python
plt.plot(X[2, :], '+')
plt.show()
```

et après exécution, on obtient le graphique :



Que contient le vecteur ligne `X[2, :]` ? On précisera quelle variable est mémorisée dans la k-ième colonne de ce vecteur. Commenter le graphique obtenu.

Exercice 2

Rappels :

- Soit M une matrice. La transposée de M, notée ${}^tM$ est la matrice obtenue à partir de M en échangeant les lignes et les colonnes. Par exemple :

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Une matrice carrée M est dite symétrique si ${}^tM = M$. Par exemple, la matrice M de l'exemple précédent n'est pas symétrique !

  On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n, c'est-à-dire :

$$\mathscr{S}_n = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M \right\}.$$

Partie 1 : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathscr{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{B} = (F, G, H)$ est une base de $\mathscr{S}_2$.

   Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_2$.

2. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathscr{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

   (a) Montrer que : $\forall S \in \mathscr{S}_2,\ u(S) \in \mathscr{S}_2$.

   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_2$.

   (c) Calculer les produits AFA, AGA, AHA.

   (d) Donner la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{S}_2$.

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

3. On définit les matrices $B = 4F + 3G - 4H$, $C = 4F - 2G + H$ et $E = F + 2G + 4H$.

   Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (B, C, E)$ est une base de $\mathscr{S}_2$. Exprimer $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

4. Déterminer la matrice D de l'application u dans la base $\mathscr{B}'$ et justifier la relation $M = PDP^{-1}$.

5. On exécute les instructions suivantes dans la console `Python` :

```
>>> M = np.array([[0, 0, 4], [0, 4, 6], [4, 12, 9]])
>>> Sp, VP = al.eig(M)
>>> Sp

array([16.,  1.,  -4  ])

>>> VP

array([[- 0.2182179,  - 0.8728716,  - 0.6246950  ],
       [- 0.4364358,    0.4364358,  - 0.4685213  ],
       [- 0.8728716,  - 0.2182179,    0.6246950  ]])
```

Justifier la cohérence des matrices obtenues.

6. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.
7. En déduire que : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
8. Établir que : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathscr{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?
   (b) Écrire une fonction en `Python` qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $P(T_n \leq x)$.
   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.
5. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.
   (b) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1 et l'espérance $E(T_2)$ de T_2.
6. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.
   (b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : La loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité: $(N=0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$. En déduire la probabilité $P(N=0)$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n) = (1-e^{-a})^{n-1}e^{-a}$.

9. Déterminer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de N.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_N(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}.$$

10. Justifier $P(Z \leq a) = 0$.

11. Soit $x \in]a, +\infty[$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité d'événements :

    $$((N=n) \cap (Z \leq x)) = \begin{cases} (a < X_1 \leq x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

    En déduire la probabilité $P((N=n) \cap (Z \leq x))$.

    (b) Montrer alors : $P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$.

12. (a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

    (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $V(Z)$.