DM 15

A rendre le Mardi 12 Mars

Exercice 1

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A.

1. Déterminer le rang de $A - 6I_3$.

   En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.

   Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.

3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Donner la matrice B de f dans cette base.

   (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P.
   On ne cherchera pas P^{-1}.

4. La matrice A est-elle inversible ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

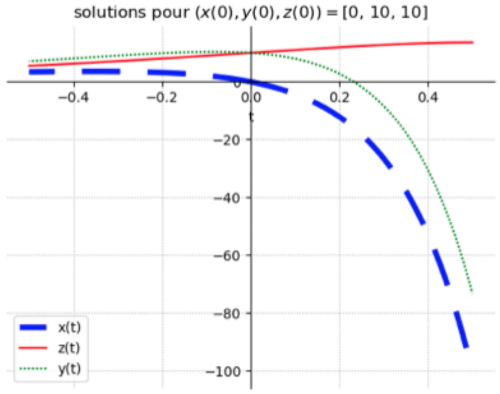
Partie 2

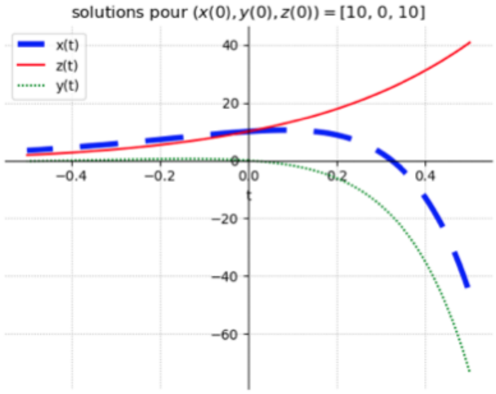
On considère le système différentiel suivant :

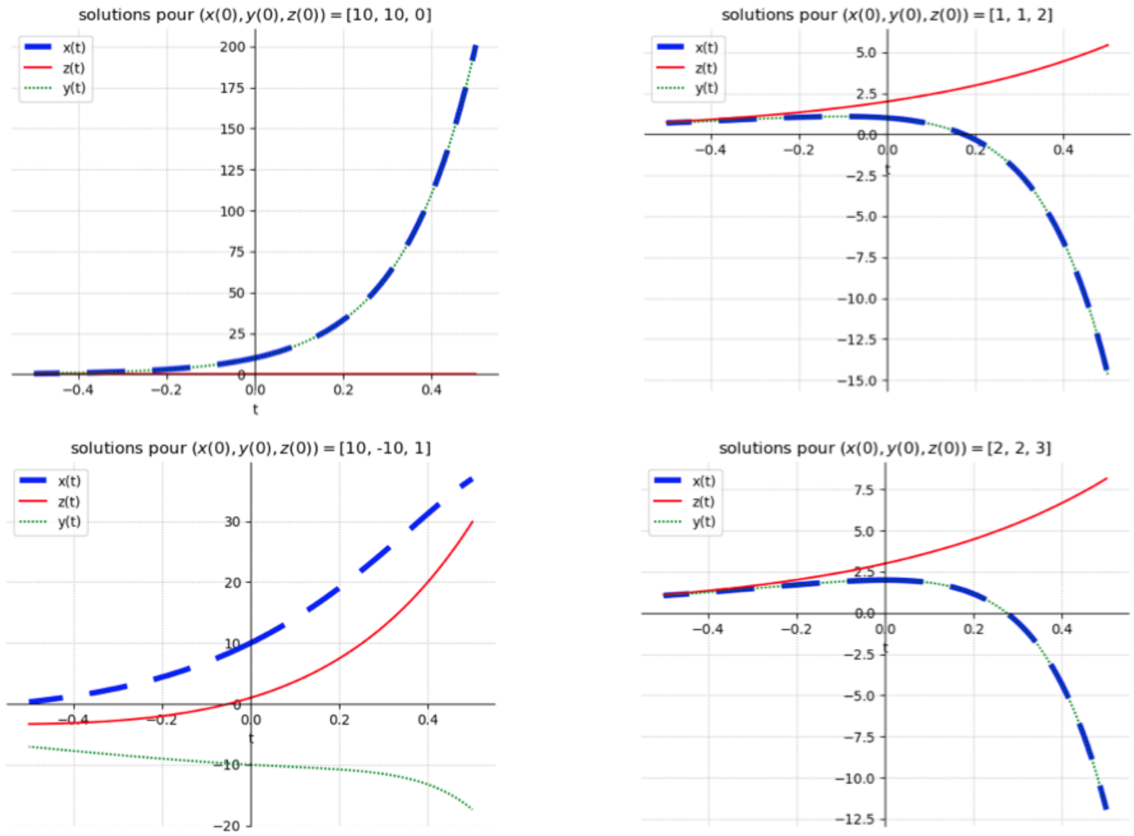
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) & = & 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) & = & x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

5. En utilisant le module `scipy.integrate` de `Python`, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$.







Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

6. Montrer que pour tout réel t, $X'(t) = AX(t)$.

7. On note pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que pour tout réel t, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$. Montrer que pour tout réel t, $Y'(t) = BY(t)$.

8. (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$;

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 6\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

   (b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$;

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_2)$$

   (c) Soit c un réel.
   Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$;

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

   Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{E}_3)$.

9. En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathscr{E}_1)$, β est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et α est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

10. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

11. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - x_0)\right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ z(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0\right) e^{2t} \end{array} \right.$$

12. Justifier la conjecture faite à la question 5.

Exercice 2

1. Montrer que, si A désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors la matrice A^2 est aussi diagonalisable.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (c) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
   On pourra raisonner par l'absurde et montrer que $A^2 = I_3$.

3. (a) Donner une base (u) de $Ker(g - Id)$.
   (b) Déterminer une base (v, w) de $Ker(g^2 + Id)$.
   (c) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w).
   (e) En déduire que A^2 est diagonalisable.

Exercice 3

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et indépendantes.
On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.
On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$.
L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P([X \leq x] \cap [Y = 1]) = P(X \leq x) P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P([X \leq x] \cap [Y = -1]) = P(X \leq x) P(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : Expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

2. En utilisant le système complet d'évènements $\{(Y=1),(Y=-1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

Partie 2 : Étude de deux premiers exemples.

3. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.

   (a) i. Compléter le programme suivant qui effectue 10000 simulations de la variable Z et affiche le diagramme en bâton des fréquences des classes modales

   $$[-5;-4,9],\ [-4,9;-4,8],\ .....,\ [4,9;5].$$

```
X = rd.normal( ....., ....., 10000)
Y = rd.randint(0, 2, 10000)
Y = 2*Y-1
Z = .....
x = np.arange(-5, 5.1, 0.1)
plt.hist(Z, x, density = 'True')
```

   ii. Expliquer pourquoi les instructions :

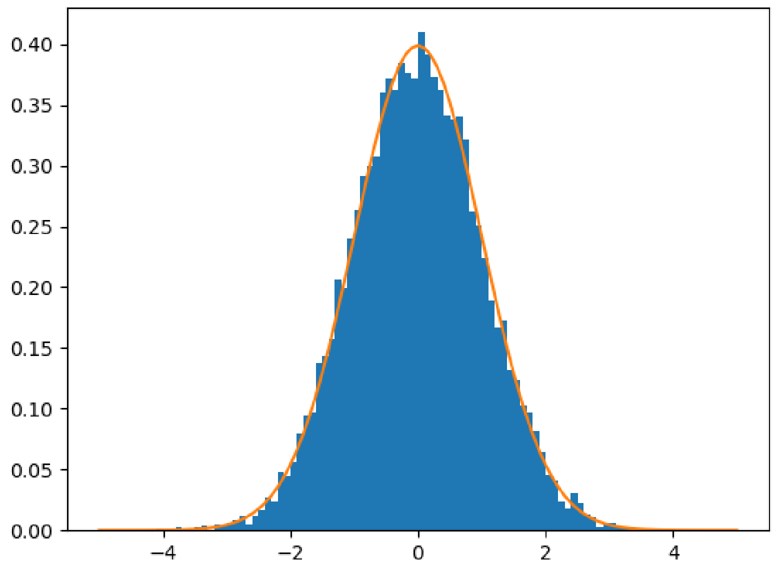
```
Y = rd.randint(0, 2, 10000)
Y = 2*Y-1
```

   simulent bien 10000 uniformes sur $\{-1;1\}$.

   iii. On rajoute l'instruction

```
plt.plot(x, 1/sqrt(2*np.pi)*np.exp((-x**2)/2))
plt.show()
```

   et on exécute. On obtient le graphique suivant :



   Conjecturer la loi de Z.

   (b) Prouver la conjecture précédente.

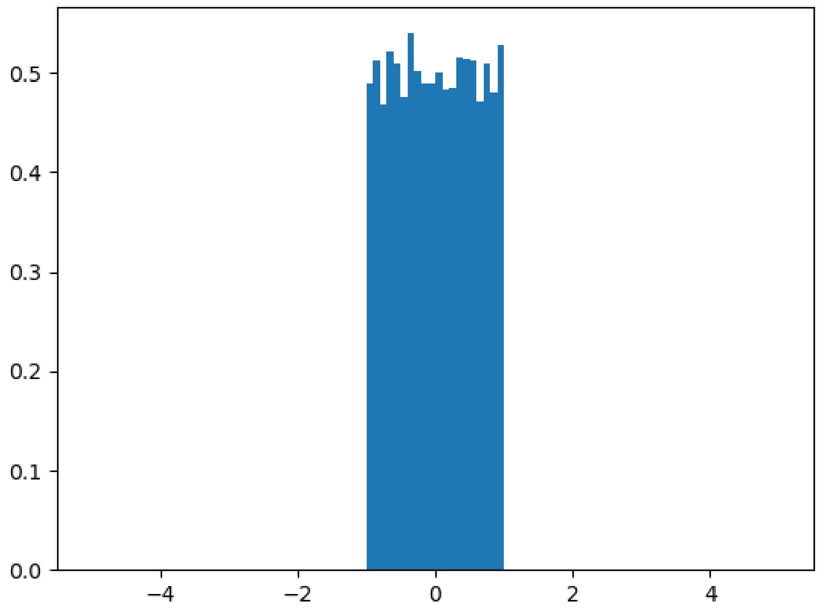
4. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

   (a) Compléter le programme suivant qui effectue 10000 simulations de la variable Z et affiche le diagramme en bâton des fréquences des classes modales

$$[-5;-4,9],\ [-4,9;-4,8].....[4,9;5].$$

```
X = rd.uniform( ....., ....., 10000)
Y = rd.randint(0, 2, 10000)
Y = 2*Y-1
Z = .....
x = np.arange(-5, 5.1, 0.1)
plt.hist(Z, x, density = 'True')
plt.show()
```

Après exécution, on obtient le graphique :



Conjecturer la loi de Z.

(b) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

(c) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : Étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

5. (a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

(c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(d) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

(e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

6. (a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$.

(b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

7. (a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

(b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

8. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

   (a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire.
   Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

   (b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire.
   Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

   (c) En tenant compte des résultats des deux questions précédentes, écrire en `Python` une déclaration de fonction `sumulation_Z()` pour qu'elle simule une variable aléatoire suivant la loi de Z.
