

A rendre le Vendredi 7 Mars

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a.$$

I. Recherche des valeurs propres de f_a .

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de M_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q .
2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q .
3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a .
4. Lorsque $a = 1$, la matrice M_1 est-il diagonalisable ?

II. Réduction de la matrice M_a .

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

5. Prouver que \mathcal{B}' est une base de E et déterminer la matrice de passage, qu'on notera P_a , de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .
6. Exprimer $f_a(e'_1)$ en fonction de e'_1 .
7. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a , c'est-à-dire :

$$f_a(F) \subset F$$

8. Donner l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base \mathcal{B}' .
9. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où, par convention, on pose $T_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III. Étude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 0, \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

10. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

11. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

12. Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de P_2 puis exprimer u_n en fonction de n .

13. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

14. (a) Compléter le programme Python suivant de manière à ce que, pour tout $n \in \llbracket 1, 20 \rrbracket$, la n -ième colonne de la matrice X contienne la valeur du vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$:

```

1 | M = np.array([[4, -5, 2], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
2 | X = np.zeros((3,20))
3 | X[0, 0] = 7
4 | X[2, 0] = -1
5 | for n in range(1,20):
6 |     X[:, n] = .....

```

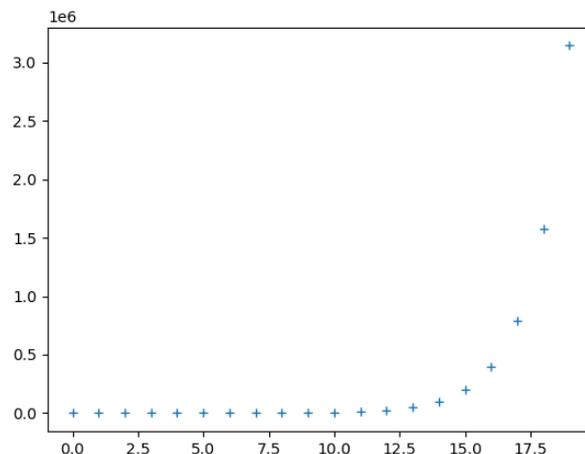
(b) On ajoute à la fin du programme les commandes

```

6 | plt.plot(X[2, :], '+')
7 | plt.show()

```

et après exécution, on obtient le graphique :



Que contient le vecteur ligne $X[2, :]$? On précisera quelle variable est mémorisée dans la k -ième colonne de ce vecteur. Commenter le graphique obtenu.

Exercice 2

Rappels :

- Soit M une matrice. La transposée de M , notée tM est la matrice obtenue à partir de M en échangeant les lignes et les colonnes. Par exemple :

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Une matrice carrée M est dite symétrique si ${}^tM = M$. Par exemple, la matrice M de l'exemple précédent n'est pas symétrique !

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n , c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}.$$

Partie 1 : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note \mathcal{S}_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Montrer que \mathcal{S}_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{B} = (F, G, H)$ est une base de \mathcal{S}_2 . Déterminer la dimension de \mathcal{S}_2 .
2. On note u l'application qui à chaque matrice S de \mathcal{S}_2 , associe la matrice $u(S) = ASA$.
 - (a) Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_2, u(S) \in \mathcal{S}_2$.
 - (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{S}_2 .
 - (c) Calculer les produits AFA , AGA , AHA .
 - (d) Donner la matrice M de u dans la base \mathcal{B} de \mathcal{S}_2 .

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

3. On définit les matrices $B = 4F + 3G - 4H$, $C = 4F - 2G + H$ et $E = F + 2G + 4H$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (B, C, E)$ est une base de \mathcal{S}_2 . Exprimer $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.
4. Déterminer la matrice D de l'application u dans la base \mathcal{B}' et justifier la relation $M = PDP^{-1}$.
5. On exécute les instructions suivantes dans la console Python :

```
>>> M = np.array([[0, 0, 4], [0, 4, 6], [4, 12, 9]])
>>> Sp, VP = al.eig(M)
>>> Sp

array([16.,  1., -4  ])

>>> VP

array([[ -0.2182179,  -0.8728716,  -0.6246950  ],
       [ -0.4364358,   0.4364358,  -0.4685213  ],
       [ -0.8728716,  -0.2182179,   0.6246950  ]])
```

Justifier la cohérence des matrices obtenues.

6. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
7. En déduire que : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
8. Établir que : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de \mathcal{S}_2 et où u a été définie dans la partie I.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, (Ω, \mathcal{A}, P) désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$?
- (b) Écrire une fonction en Python qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ .

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ qui, à tout ω de Ω , associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. (a) Calculer, pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout x de \mathbb{R}_+ , la probabilité $P(T_n \leq x)$.
(b) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n .
5. (a) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire T_n admet une espérance.
(b) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1 et l'espérance $E(T_2)$ de T_2 .
6. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.
(b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x) dx.$$

- (c) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* , une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : La loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de \mathbb{N}^* tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité: $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$. En déduire la probabilité $P(N = 0)$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$.

9. Déterminer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de N .

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z , définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_N(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}.$$

10. Justifier $P(Z \leq a) = 0$.

11. Soit $x \in]a, +\infty[$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité d'événements :

$$((N = n) \cap (Z \leq x)) = \begin{cases} (a < X_1 \leq x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

En déduire la probabilité $P((N = n) \cap (Z \leq x))$.

(b) Montrer alors : $P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$.

12. (a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $V(Z)$.