DM 16

A rendre le Mercredi 20 Mars

Exercice 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2;n+1]\!]$. Par exemple, si $n=5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,4,3, alors $X_5=4$. Pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n=3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n=3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'événement $(X_3=4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2 et N_3. En déduire $P(X_3=4)$.
   (b) Montrer que $P(X_3=2)=\dfrac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3=3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n=n+1)$.
5. Montrer, pour tout $i\in[\![1;n]\!]$: $P_{(N_1=i)}(X_n=2)=\dfrac{n-i+1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $P(X_n=2)$.
7. Soit $k\in[\![2;n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n>k)=(N_1>N_2>\ldots>N_k)$.
   En déduire que $P(X_n>k)=\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k=0$ et pour $k=1$.
8. Exprimer, pour tout $k\in[\![2;n+1]\!]$, $P(X_n=k)$ à l'aide de $P(X_n>k-1)$ et de $P(X_n>k)$.
9. En déduire : $E(X_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X_n>k)$. Calculer ensuite $E(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k\in[\![2;n+1]\!], P(X_n=k)=\dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n=k)=\frac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\sum_{k\geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

    On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2;+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ P(Z=k)=\frac{k-1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 2

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.

On note A l'évènement : "C_3 termine en dernier son opération". Ainsi l'évènement A est égal à l'évènement : $(\min(X_1,X_2)+X_3 > \max(X_1,X_2))$. On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$.

   On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Justifier : $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$.

   (b) En déduire : $P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.

4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.

   (b) Montrer : $E((X_1-X_2)^2) = 2V(X_1)$.
   En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'évènement A est égal à l'évènement $(X_3 > \Delta)$.

6. (a) En déduire : $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k)$.

   (b) Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q.

7. Nous allons écrire plusieurs versions d'un programme qui effectue 10000 simulations de l'épreuve et compare la fréquence de l'évènement A après la probabilité théorique $P(A)$ déterminée précédemment.

   (a) <u>Première méthode de calcul de f</u> :
   Compléter la première version suivante du programme décrit ci-dessus; de manière à ce que la variable `N` compte le nombre d'occurrences de l'évènement A au cours des 10000 simulations.

```
p = float(input('Entrer p : '))
q = 1-p

X1 = rd.geometric(p , 10000)
X2 = rd.geometric(p , 10000)
X3 = rd.geometric(p , 10000)

N = 0
for k in range(10000):
    if ..... :
        N = .....

f = .....
P = (1+q**2)/((1+q)**2)

print(f) #fréquence de A
print(P) #proba de A
```

(b) Deuxième méthode de calcul de f :
En réalité, la boucle for n'est pas nécessaire car nous pouvons comparer directement deux matrices terme à terme: On rappelle que si `A` et `B` sont deux matrices de même taille alors l'instruction `C=(A >B)` renvoie une matrice booléenne `C` (c'est-à-dire ne contenant que vrai (1) ou faux (0)) dont chaque coefficient $c_{i,j}$ vaut 1 si $(a_{i,j} > b_{i,j})$ est vrai, et vaut 0 sinon.
Remplir la deuxième version du programme suivante, qui calcule `f` en une seule instruction. Elle utilisera une comparaison directe entre deux vecteurs lignes (du type $(A > B)$) ainsi que la commande `np.sum()`.

```
p = float(input('Entrer p : '))
q = 1-p

X1 = rd.geometric(p , 10000)
X2 = rd.geometric(p , 10000)
X3 = rd.geometric(p , 10000)

f = .....
P = (1+q**2)/((1+q)**2)

print(f) #fréquence de A
print(P) #proba de A
```

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0;+\infty[$. On note $q = 1-p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad P((X=k)\cap(Y\leq t)) = P(X=k)P(Y\leq t)$$

8. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

9. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

(a) Montrer : $\forall t \in [0;+\infty[, \quad P(Z \geq t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y \geq kt)$.

(b) En déduire : $\forall t \in [0;+\infty[, \quad P(Z \geq t) = \dfrac{pe^{-\lambda t}}{1-qe^{-\lambda t}}$.

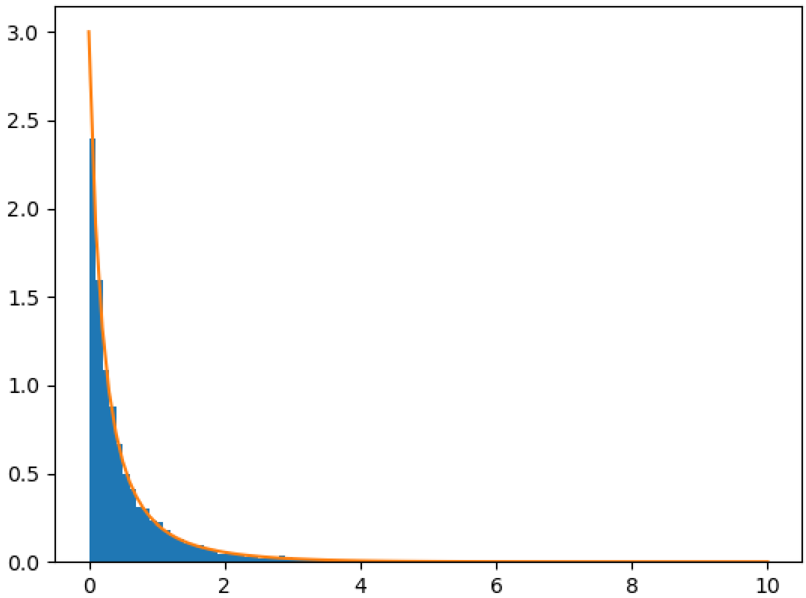
(c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

10. Dans cette question on choisit $p = 1/3$ et $\lambda = 1$.

(a) Écrire un programme en `Python` qui effectue 10000 simulations de la variable Z puis trace sur la même figure :

- L'histogramme des fréquences obtenues sur l'intervalle $[0, 10]$ découpé en classes modales de longueur $0,1$;
- La courbe de la densité de Z sur le même intervalle.

(b) Après exécution, on obtient le graphique suivant :



Commenter.

Exercice 3

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I - Étude d'une fonction.

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = x^2e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2};1[$.

Partie II - Étude d'une suite.

On considère la fonction $f(x) = x^3e^x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III - Étude d'une série.

6. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leq \dfrac{1}{(e-1)e^n}$.

8. En déduire une fonction en `Python` qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV - Étude d'une fonction de deux variables.
On considère l'ouvert $U =]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathscr{C}^2$ suivante :

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2e^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.

10. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x,y).

11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.

12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?
