

A rendre le Vendredi 29 Mars

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.
On note \mathcal{C} la courbe représentative de φ .
6. Montrer que \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de \mathcal{C} et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0; +\infty[$ et on considère l'application : $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

8. On exécute les programmes suivants :

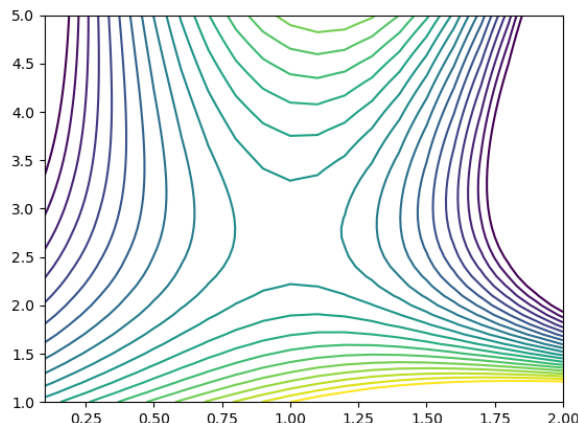
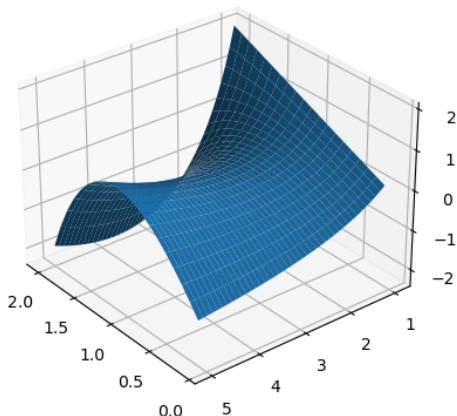
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpl.toolkits.mplot3d import
  Axes3D
4
5 def f(x, y):
6     return x*y-np.exp(x)*np.log(y)
7
8 x = np.arange(0.1, 2.1, 0.1)
9 y = np.arange(1, 5.1, 0.1)
10 X, Y = np.meshgrid(x, y)
11
12 fig = plt.figure()
13 ax = plt.axes(projection='3d')
14 ax.plot_surface(X, Y, f(X, Y))
15
16 plt.show()
```

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpl.toolkits.mplot3d import
  Axes3D
4
5 def f(x, y):
6     return x*y-np.exp(x)*np.log(y)
7
8 x = np.arange(0.1, 2.1, 0.1)
9 y = np.arange(1, 5.1, 0.1)
10 X, Y = np.meshgrid(x, y)
11
12 L = np.linspace(-1, 1, 20)
13 plt.contour(X, Y, f(X, Y), L)
14
15 plt.show()
```

On obtient les graphiques :



Au vu de ces résultats, f semble-t-elle avoir un point critique sur l'ensemble $[0, 1; 2] \times [1; 5]$? Si oui, donner une valeur approchée des (x_0, y_0) en lequel il est atteint.

Ce point critique semble-t-il être un extremum local ?

9. Représenter graphiquement l'ensemble U .
10. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y) .
11. Établir que, pour tout $(x, y) \in U$, (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \text{ et } y = e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0.$$

12. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.
13. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, e)$?
14. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. On pourra utiliser les résultats de la partie I.
16. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
17. Écrire un programme en **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.
18. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?
19. Compléter le programme **Python** suivant qui enregistre les 10 premiers termes de la suite u dans un vecteur ligne **U** puis enregistre les 10 premiers termes de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ dans un vecteur ligne **S** et trace leur représentation graphique.

```

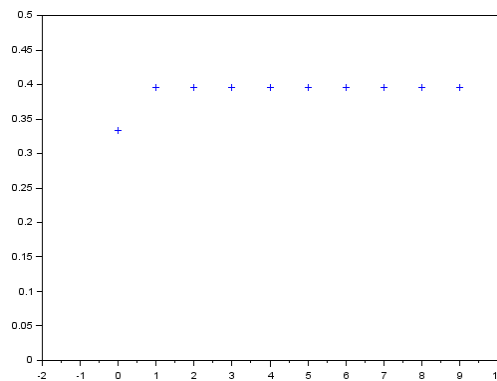
1 | def phi(x):
2 |     return np.exp(x)-x*np.exp(1/x)
3 |
4 | U = np.zeros(10)
5 | U[0] = 3
    
```

```

6 | for k in range(9):
7 |     U[k+1] = .....
8 |
9 | S = np.cumsum( ..... )
10 | n = np.arange(0, 10)
11 | plt.plot(n, S, '+')
12 | plt.show()

```

Après exécution on obtient le graphique suivant :



Commenter.

Exercice 2

- On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3 .
- Déterminer une base (a) de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\text{Im}(f)$.
- Montrer que $\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de \mathbb{R}^3 tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

En désignant par M la matrice de g dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , on a donc :

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\text{Im}(g^2) = \text{Ker}(g)$.

- Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M .
 - Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M .
 - En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que M n'est pas diagonalisable.
- Justifier qu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^3 tel que $g^2(u) \neq 0$.
 - Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 , que l'on notera \mathcal{B}' .
 - Donner la matrice N de g dans la base \mathcal{B}' .
 - Déterminer $\text{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\text{Ker}(g)$.
Pour finir, déterminer $\text{Im}(g^2)$ puis conclure.

Exercice 3

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.

1. (a) Montrer que f est paire.
 (b) Établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et donner sa valeur.
 (c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$.
 (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.
3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge et donner sa valeur.
 (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.
4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
 (a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
 (b) Déterminer une densité f_Y de Y , puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .
 (c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.
5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$.
 (a) On pose $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
 Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W .
 (b) En déduire une fonction **Python** qui simule la loi de $|X|$.
 (c) Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
 En déduire une fonction **Python**, utilisant qui simule la loi de X .

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y .

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon $(Y_1; \dots; Y_n)$ de la loi de Y . Les variables Y_1, \dots, Y_n sont supposées définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y .

6. On considère des réels x_1, \dots, x_n strictement positifs, ainsi que la fonction L , à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur $]0; +\infty[$ par $\forall \lambda \in]0; +\infty[, L(\lambda) = \prod_{k=1}^n f_Y(x_k)$.
 (a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln(L(\lambda))$ en fonction de λ, x_1, \dots, x_n .

(b) On considère la fonction φ , définie pour tout réel λ de $]0; +\infty[$ par $\varphi(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^n x_k$.

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de x_1, \dots, x_n .

Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

7. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n Y_k}$.

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

La suite $(Z_n)_{n \geq 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ .

On admet que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n Y_k$ admet pour densité la fonction f_n définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

(a) En remarquant que $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t) dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1} \lambda.$$

(b) Déterminer un estimateur Z'_n , fonction simple de Z_n qui soit un estimateur sans biais de λ (c'est-à-dire tel que $E(Z'_n) = \lambda$).