

A rendre le Vendredi 21 Mars

Exercice 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2; n + 1 \rrbracket$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,4,3, alors $X_5 = 4$. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1 , N_2 et N_3 . En déduire $P(X_3 = 4)$.
 (b) Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n = n + 1)$.
5. Montrer, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - i + 1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
7. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$.
 En déduire que $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
 Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k - 1)$ et de $P(X_n > k)$.
9. En déduire : $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$. Calculer ensuite $E(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.
12. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\llbracket 2; +\infty \llbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

Exercice 2

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p , $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'évènement : " C_3 termine en dernier son opération". Ainsi l'évènement A est égal à l'évènement : $(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2))$. On se propose de calculer la probabilité de A .

- Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$.

On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

- Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.
- Soit n un entier naturel non nul.

(a) Justifier : $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k)$.

(b) En déduire : $P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1 + q}$.

- Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
 - Montrer : $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$.
En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
- Montrer que l'évènement A est égal à l'évènement $(X_3 > \Delta)$.

6. (a) En déduire : $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)P(X_3 > k)$.

(b) Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q .

- Nous allons écrire plusieurs versions d'un programme qui effectue 10000 simulations de l'épreuve et compare la fréquence de l'évènement A après la probabilité théorique $P(A)$ déterminée précédemment.

(a) Première méthode de calcul de f :

Compléter la première version suivante du programme décrit ci-dessus; de manière à ce que la variable N compte le nombre d'occurrences de l'évènement A au cours des 10000 simulations.

```

1 | p = float(input('Entrer p : '))
2 | q = 1-p
3 |
4 | X1 = rd.geometric(p , 10000)
5 | X2 = rd.geometric(p , 10000)

```

```

6 | X3 = rd.geometric(p , 10000)
7 |
8 | N = 0
9 | for k in range(10000):
10 |     if ..... :
11 |         N = .....
12 |
13 | f = .....
14 | P = (1+q**2)/((1+q)**2)
15 |
16 | print(f) #fréquence de A
17 | print(P) #proba de A

```

(b) Deuxième méthode de calcul de f :

En réalité, la boucle for n'est pas nécessaire car nous pouvons comparer directement deux matrices terme à terme: On rappelle que si A et B sont deux matrices de même taille alors l'instruction $C=(A >B)$ renvoie une matrice booléenne C (c'est-à-dire ne contenant que vrai (1) ou faux (0)) dont chaque coefficient $c_{i,j}$ vaut 1 si $(a_{i,j} > b_{i,j})$ est vrai, et vaut 0 sinon. Remplir la deuxième version du programme suivante, qui calcule f en une seule instruction. Elle utilisera une comparaison directe entre deux vecteurs lignes (du type $(A > B)$) ainsi que la commande `np.sum()`.

```

1 | p = float(input('Entrer p : '))
2 | q = 1-p
3 |
4 | X1 = rd.geometric(p , 10000)
5 | X2 = rd.geometric(p , 10000)
6 | X3 = rd.geometric(p , 10000)
7 |
8 | f = .....
9 | P = (1+q**2)/((1+q)**2)
10 |
11 | print(f) #fréquence de A
12 | print(P) #proba de A

```

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p , $p \in]0; 1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda \in]0; +\infty[$. On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[, \quad P((X = k) \cap (Y \leq t)) = P(X = k)P(Y \leq t)$$

8. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

9. On définit la variable aléatoire $Z = \frac{Y}{X}$.

(a) Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad P(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y \geq kt)$.

(b) En déduire : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad P(Z \geq t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}$.

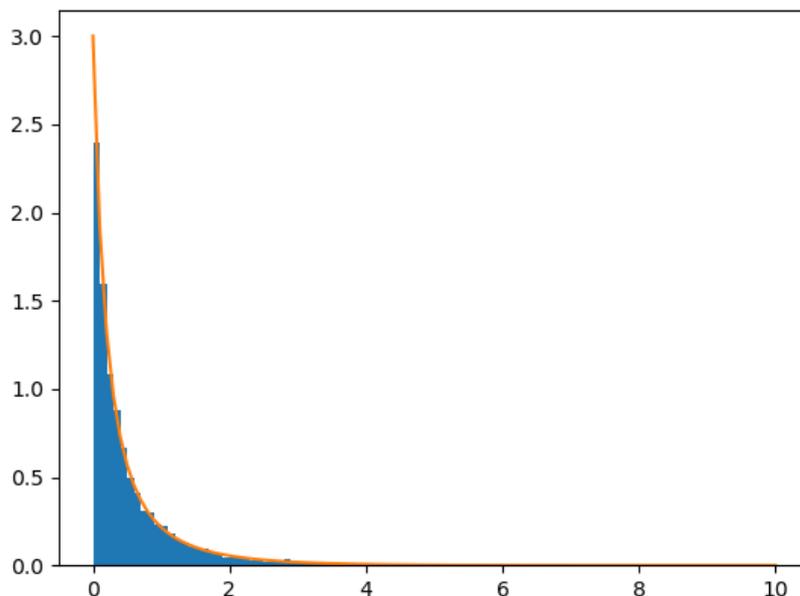
(c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z .

10. Dans cette question on choisit $p = 1/3$ et $\lambda = 1$.

(a) Écrire un programme en Python qui effectue 10000 simulations de la variable Z puis trace sur la même figure :

- L'histogramme des fréquences obtenues sur l'intervalle $[0, 10]$ découpé en classes modales de longueur 0,1 ;
- La courbe de la densité de Z sur le même intervalle.

(b) Après exécution, on obtient le graphique suivant :



Commenter.

Exercice 3

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I - Étude d'une fonction.

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $] \frac{1}{2}; 1[$.

Partie II - Étude d'une suite.

On considère la fonction $f(x) = x^3 e^x$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
4. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III - Étude d'une série.

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.

8. En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV - Étude d'une fonction de deux variables.

On considère l'ouvert $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 et l'application de classe \mathcal{C}^2 suivante :

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U .
 10. Calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières de g en (x, y) .
 11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.
 12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?
 13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?
 14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?
-