

## A rendre le Lundi 20 Septembre

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1,$$

ainsi que la fonction  $\varphi$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$

On donne le tableau de valeurs de  $f$  :

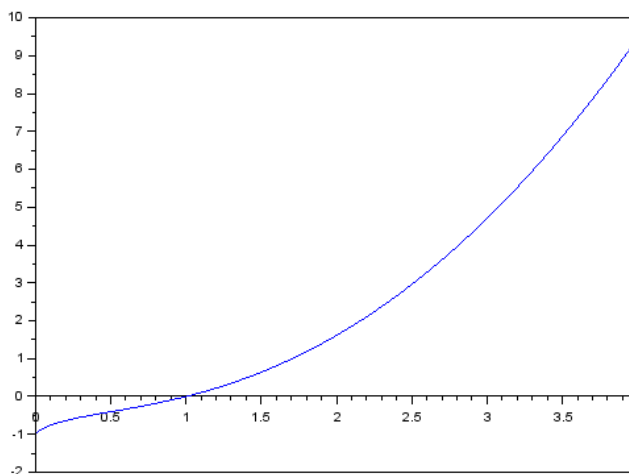
$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \simeq$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que la courbe de  $f$  admet un demi-tangente à droite en 0 et donner l'allure de la courbe de  $f$  au voisinage de 0.
3. Étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis dresser son tableau de variation en précisant la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini.
4. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de  $f^{-1}$  ? Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
6. (a) On considère le programme en Scilab suivant :

```
x=linspace(0.01,4, 400)
y=x.^2-x.*log(x)-1
plot(x,y)
```

Que crée la commande `x=linspace(0.01,4, 400)` ? Que fait le programme ?

- (b) Une fois exécuté, le programme affiche le graphique suivant :



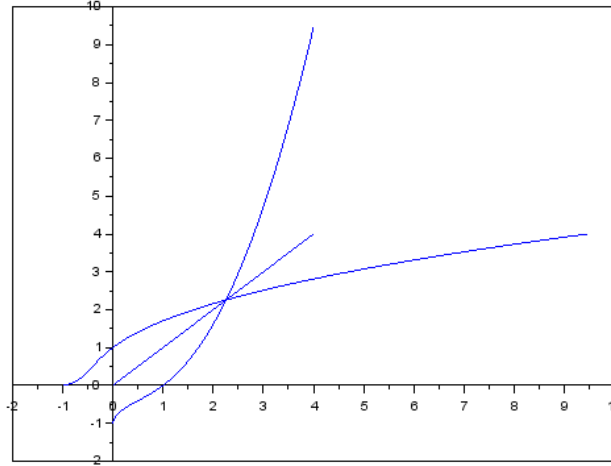
Expliquer en quoi le graphique illustre les réponses aux questions 1., 2. et 3. de l'exercice.

- (c) A la suite du programme précédent, on rajoute les commandes suivantes :

```
plot(x,x)
plot(y,x)
```

Quelle fonction sera tracée grâce à la dernière instruction ?

(d) Le changement énoncé ci-dessus donne la courbe suivante :



Expliquer en quoi le graphique obtenu est cohérent.

7. Étude d'une suite implicite  $(x_k)$  :

- Justifier que pour tout entier naturel  $k$ , il existe un unique réel  $x_k$  positif tel que  $f(x_k) = k$ .
- Donner la valeur de  $x_0$ .
- Utiliser le tableau de valeurs de  $f$  pour déterminer un encadrement de  $x_1$  et  $x_2$  entre deux entiers consécutifs.
- Exprimer  $x_k$  à l'aide de  $f^{-1}$  puis justifier que la suite  $(x_k)$  est croissante et déterminer sa limite lorsque  $k$  tend vers l'infini.

8. Étude d'une suite récurrente  $(u_n)$  :

On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

- Étudier les variations de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- On donne  $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$  et  $\varphi(2) \simeq 1,69$ . Montrer que :  $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .
- En étudiant les variations de  $\varphi'$ , montrer que :  $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$ .
- Montrer que les équations  $x = \varphi(x)$  et  $f(x) = 1$  sont équivalentes. En déduire que le réel  $x_1$  est l'unique solution de l'équation  $x = \varphi(x)$ .
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ .
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|.$$

(g) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

(h) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

(i) Déterminer un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - x_1| \leq 10^{-4}$ .

(j) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche  $u_N$  :

```
function y=phi(x)
    y= 2/x+log(x)
endfunction

N= floor(-4*log(10)/log(2/9))+1
U=3/2
for n=1:N do
    U=.....
end
disp(U, "U=")
```

Le programme donne le résultat suivant :

```
U=
    1.70644
```

Expliquer pourquoi on est certains que la valeur exacte de  $x_1$  est comprise entre 1,70634 et 1,70654.

## Exercice 2

### Partie 1

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ .

2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \ln(n) + 1$ .

### Partie 2

On considère une suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation suivante, valable pour tout entier  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

(b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

4. (a) Pour tout entier  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .

(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n^2 \geq 2n + 1$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

5. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que :  $\forall n \geq 2$ ,  $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$ .

- (b) En utilisant la partie 1., établir que :  $\forall n \geq 2, u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$ .
- (c) En déduire finalement que  $u_n \sim \sqrt{2n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Partie 3

6. Écrire un programme en Scilab permettant de calculer et d'afficher  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$  au clavier.
7. (a) Écrire un deuxième programme, toujours en Scilab, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $u_n \geq 100$ .
- (b) On donne  $\ln(2) < 0,70$  et  $\ln(5) < 1,61$ . En déduire un majorant de  $\ln(5000)$ .
- (c) Montrer que l'entier  $n$  trouvé en 7.(a) est compris entre 4995 et 5000.

### Exercice 3

1. (a) Montrer que pour tout  $x > 0 : x - \ln(x) > 0$
- (b) On pose alors :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

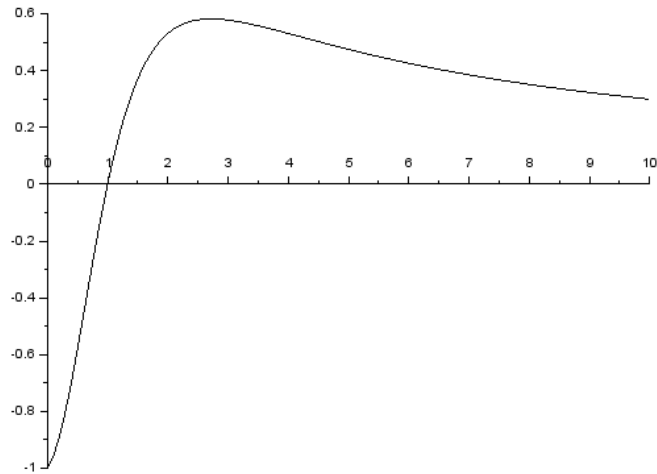
Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de la fonction  $f$ .

2. (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $D$ .
- (b) Montrer que  $f$  est dérivable (à droite) en 0 et que  $f'_d(0) = 0$ .
3. (a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $D \setminus \{0\}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $D \setminus \{0\}$ .
- (b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- (c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Étudier le signe de  $f(x)$ .
5. (a) Compléter le programme Scilab suivant qui trace une courbe approchée de celle de  $f$  sur le segment  $[0, 10]$  :

```
function y=f(x)
    if ***** then
        y=-1
    else
        y=*****
    end
endfunction
```

```
x=0:0.1:10
fplot2d(0:0.1:10,f)
```

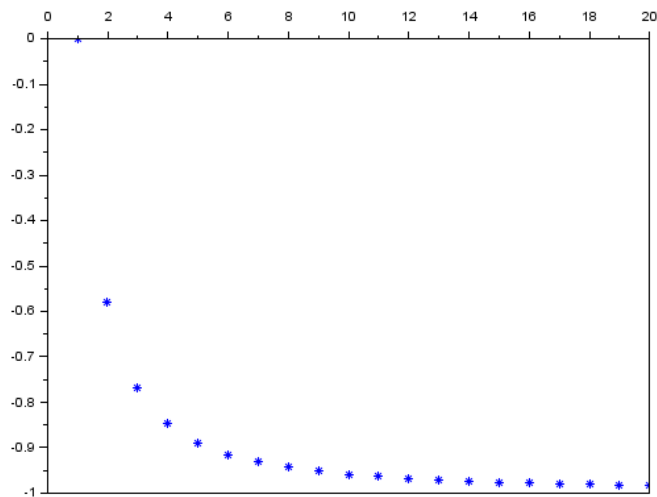
On obtient le graphique :



- (b) Le réel 0,21 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x=0:0.1:10` ?  
 Écrire une instruction `x=`, renvoyant les mêmes nombres que cette instruction mais utilisant la commande `linspace`.
- (c) On exécute le programme suivant :

```
D=zeros(1,20)
for k=1:20 do
    D(k)= f(1/k)
end
plot(D, '*')
```

On obtient le graphique :



Expliquer en quoi ce graphique est cohérent avec l'un des résultats de l'exercice.