DM6

Devoir maison à rendre le 12/11/19

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^{3/5} \times b_n^{2/5} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n^{2/5} \times b_n^{3/5}$$

On suppose $b_0 > a_0 > 0$. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \ln(a_n)$ et $v_n = \ln(b_n)$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$
2. On pose $t_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n et de t_0.
   (c) Montrer que $t_0 \leq 0$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.
3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ.
   (b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune L strictement positive.
5. (a) Montrer que la suite $w_n = a_n b_n$ est constante.
   (b) En déduire que $L = \sqrt{a_0 b_0}$.
   (c) On suppose dans cette question que $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.
   Compléter le programme Scilab suivant pour que, étant donné $\varepsilon > 0$, il calcule et affiche une approximation de $L = \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{2}$ à ε près :

```
epsilon=input('Donner une valeur pour epsilon')
a=1
b=2
while ... do
    x=...
    y=...
    a=...
    b=...
end
disp(b,a)
```

Exercice 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère le polynôme $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

1. Prouver que -1 est une racine de P et déterminer Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)Q(x)$.

2. Prouver que -1 est une racine de Q et déterminer R tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = (x+1)R(x)$.

3. Factoriser R et en déduire une factorisation de P.

4. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) \quad 6e^{3x} + 7e^{2x} - 3e^{x} - 3 + e^{-x} \leq 0.$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}.$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Est-ce que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$?

2. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et la fonction polynôme P définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

   (a) Factoriser le polynôme P.

   (b) En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

   (c) Exprimer g' en fonction de P puis dresser le tableau de variation de g.

   (d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

3. Étude de f:

   (a) Vérifier que la dérivée de f peut s'écrire, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, sous la forme: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   (b) En déduire les variations de f.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$, que l'on notera α.
   Vérifier alors que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. Étude de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$:
   On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$. *On dit que la droite* Δ *d'équation* $y = x + 1$ *est asymptote oblique à* $\mathcal{C}_f$ *en* $+\infty$. *On cherche ici à étudier la position relative de* $\mathcal{C}_f$ *et de* Δ.

   (a) On pose, pour tout $x > 0$, $h(x) = x - 1 + \ln(x)$. Étudier les variations de h.

   (b) Calculer $h(1)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) En déduire le signe de $f(x) - (x+1)$, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.

5. (a) Donner les instructions Scilab pour tracer sur une même fenêtre graphique $\mathcal{C}_f$ et Δ sur l'intervalle $[\dfrac{1}{2}, 5]$.

   (b) Dessiner l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite Δ.