DM 8

A rendre le Mercredi 13 Décembre

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calcul, justifier que A n'est pas inversible. En déduire une valeur propre de A.

2. Déterminer les valeurs propres de A.

3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
   On notera $\mathscr{B} = (X_1, X_2, X_3)$ la famille obtenue en regroupant les trois vecteurs des bases des sous-espaces propres.

4. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $A = PDP^{-1}$. On explicitera P et on déterminera P^{-1}.

6. (a) Écrire des instructions en `Python` pour obtenir les valeurs propres de A dans un vecteur `Sp` et des vecteurs propres associés dans une matrice `VP`.

   (b) Une fois exécuté, le programme précédent affiche :

```
Sp = array([0., 1., 4.])
VP = array([[ 0.7071068,  0.5773503,  0.4082483]
            [-0.7071068,  0.5773503,  0.4082483]
            [ 0.       , -0.5773503,  0.8164966]])
```

   Expliquer en quoi ces résultats sont cohérents avec vos calculs.

7. Déterminer alors A^n en fonction de P, D et n pour tout $n \geq 0$. On ne calculera pas explicitement les coefficients de A^n.

8. Écrire D^n en fonction de P, A et n.

On pose E et F les ensembles suivants :

$$E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\}$$

et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 3a+2b+c & -3a+2b+c & -2b+2c \\ -3a+2b+c & 3a+2b+c & -2b+2c \\ -2b+2c & -2b+2c & 2b+4c \end{pmatrix} \text{ tel que } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

9. Montrer que E est un sous-espaces vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

10. Montrer que F est un sous-espaces vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

11. Montrer que $F \subset E$.

12. On cherche à présent à prouver que $E = F$.

    (a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose le changement de variable $N = P^{-1}MP$. Montrer que :

$$AM = MA \Leftrightarrow DN = ND.$$

(b) Résoudre l'équation $DN = ND$, avec N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(c) En déduire finalement une expression explicite des matrices appartenant à E, et conclure quant à l'objectif de la question.

Exercice 2

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les ensembles :

$$E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\} \qquad \text{et} \qquad E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}.$$

ATTENTION *: Dans cet exercice, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ ne sont pas des sous-espaces propres de A, malgré les notations qui le laissent croire (notations mal choisies). Vous serez donc obligés d'introduire d'autres notations que celles du cours si vous êtes amenés à calculer des sous-espaces propres dans cet exercice, pour ne pas faire la confusion avec les notations de l'exercice.*

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.

   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

   (c) Montrer que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

4. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.
   Comme indiqué en début d'exercice, on notera $F_\lambda(C)$ et non $E_\lambda(C)$ le sous-espace propre de C associé à la valeur propre λ pour éviter toute confusion avec les notations de l'énoncé.

   (b) En déduire une matrice P inversible, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D diagonale avec $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$, telles que $C = PDP^{-1}$.

   (c) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D)$.

   (d) Montrer que, pour tout $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si et seulement si il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (e) En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

   (f) Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base de $E_2(C)$. Quelle est la dimension de $E_2(C)$? A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

Exercice 3

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$ch\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad sh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{sh\,(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Partie 1 : Étude des fonctions ch, sh et f

1. Étudier la parité des fonctions ch et sh.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $sh(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $sh(x)$.
   En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. Étudier les variations de la fonction ch.
6. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ ch(x) > sh(x).$$
7. Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.
8. Étudier la parité de la fonction f.
9. Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction sh.
10. En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
11. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
12. On pose :
    $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = sh(x) - x\ ch(x)$$
    Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.
13. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de sa courbe représentative.

Partie 2 : Étude de la suite (u_n)

On donne : $f(0.8) \simeq 0.9$, $f(1) \simeq 0.85$, $sh(0.6) \simeq 0.64$, $sh(0.8) \simeq 0.89$, $sh(1) \simeq 1.18$ et $sh(1.2) \simeq 1.51$.

14. Justifier que $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in [0.8, 1]$$
15. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la question I.4 sans cherche à déterminer α).
16. Donner un encadrement de α et justifier que :
    $$\forall x \in [0.8, 1],\ \ \frac{h(1)}{sh^2(0.8)} \leq f'(x) \leq \frac{h(0.8)}{sh^2(1)}$$
17. On donne :
    $$\frac{h(1)}{sh^2(0.8)} \simeq -0.47 \quad \text{et} \quad \frac{h(0.8)}{sh^2(1)} \simeq -0.13.$$
    Montrer que :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5\,|u_n - \alpha|,$$
    puis que :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq 0.2\,(0.5)^n.$$

18. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

19. On admet : $2\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)} \in]4,5[$.

    Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \alpha| \leq 0,001$.

20. (a) Compléter la définition de la fonction f donnée ci-dessous :

```python
def f(x):
    if ..... :
        y = 1
    else:
        y = .....
    return(y)
```

    (b) Compléter le programme suivant, tapé à la suite de la définition de f, pour qu'il affiche la valeur de u_N :

```python
N = .....
U = 1
for k in range(1, N+1):
    U = .....
print(.....)
```

    (c) Une fois exécuté, le programme renvoie la valeur `U = 0.8813753`.
    En déduire un encadrement de la valeur exacte de α.