DM 9

A rendre le Vendredi 20 Décembre

Exercice 1

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx,\ B=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln(x))^2},\ C=\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx,\ D=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx,\ E=\int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$$

2. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{x^2-1}{x^3+x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x}dx$.

3. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$A=\int_1^e x\ln(x)dx \qquad B=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx \qquad C=\int_0^1 x^5e^{x^3}dx \qquad D=\int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$$

4. Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \qquad B=\int_e^{e^2}\frac{\ln(x)}{x(1+\ln(x))}dx \qquad C=\int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$$

   On effectuera le changement de variable $t=e^x$ pour l'intégrale A, $t=\ln(x)$ pour l'intégrale B et $t=\dfrac{1}{x}$ pour l'intégrale C.

Exercice 2

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0=1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \quad \text{et} \quad J_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n$.

   (b) En déduire I_2.

   (c) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n : ')
a = 1/2
b = np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a = .....
    b = .....
print(b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
   (b) En déduire la valeur de J_1.

7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input ('donnez une valeur pour n: ')
J = np.log(2)
for k in range(1,n):
    J = .....
I = .....
print(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9. (a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n du type $\dfrac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
    (b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

    Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

    (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$
    (b) En déduire l'égalité suivante :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$
    (c) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$

Exercice 3

On note I la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}7&5&1\\6&-1&2\\6&1&3\end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53=0$.

   (b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x)=x^3-9x^2-27x+53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M).

   (c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

   (d) Montrer que A possède trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.
   On admet qu'alors, il existe une matrice P inversible telle que $A=PDP^{-1}$, avec

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}.$$

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM=MA$.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   (b) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

   (c) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

      i. M est une matrice de E.

      ii. $P^{-1}MP$ commute avec D.

   (d) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaires des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\ ,\ P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\ ,\ P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}.$$

   (e) En déduire la dimension de E.

   (f) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

Exercice 4

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie 1 : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités.

   (b) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}, P(X=n)=(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie 2 : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $(X = n)$.
   (c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $$P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{puis} \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$
   (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $(X = n)$.
   (c) En déduire la loi de V.
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. Que vaut $Cov(U, V)$? En déduire $Cov(X, U)$.

Partie 3 : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

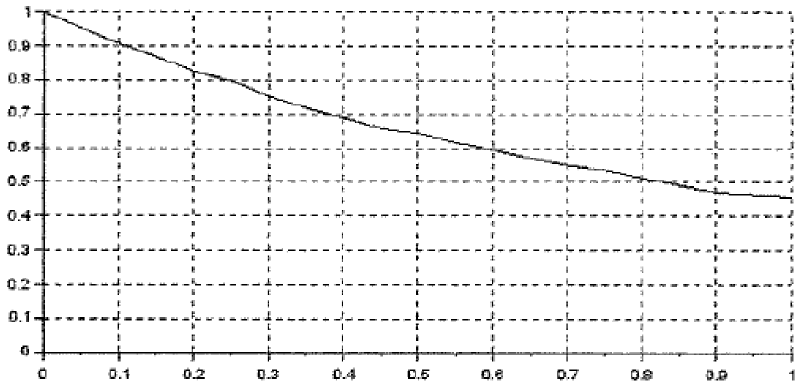
- Le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.
   (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```python
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(1,N+1)
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1/N
    return(r)
```

(c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



A la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. Soit Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

   (a) Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

   (b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y \geq n) = (1-p)^n$.

8. (a) Montrer : $P(X \leq Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n)$.

   (b) Déduire des résultats précédents : $P(X \leq Y) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

   (c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.