DS

Devoir surveillé du Jeudi 29 Novembre

La **calculatrice est interdite**. Durée : 2h.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. On répondra directement sur le sujet, sans justification, en cochant la case correspondant à la réponse envisagée. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse et l'absence de réponse ne rapportent et ne retirent aucun point.

1. L'équation $2x^2 + 6x - 5 = 0$ a pour solutions :

   ☐ $\dfrac{-\sqrt{19}-3}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{19}-3}{2}$ ☐ $\dfrac{\sqrt{19}+3}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{19}-3}{2}$

   ☐ $\dfrac{-\sqrt{19}-3}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{19}+3}{2}$ ☐ $\dfrac{-\sqrt{19}+3}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{19}+3}{2}$

2. Le prix d'un article a augmenté de 50% en 10 ans. Ce prix a donc été multiplié par :

   ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{3}{2}$ ☐ 2 ☐ 3

3. La dérivée de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$ est la fonction :

   ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ ☐ $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ☐ $x \mapsto e^x$

4. Soit $f : (x, y) \mapsto xe^{xy^2}$. Alors, la dérivée partielle $\partial_1(f)(x, y)$ est la fonction :

   ☐ $(x, y) \mapsto e^{xy^2}$ ☐ $(x, y) \mapsto y^2e^{xy^2}$ ☐ $(x, y) \mapsto xy^2e^{xy^2}$ ☐ $(x, y) \mapsto (1 + xy^2)e^{xy^2}$

5. La fonction $f : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 4$ admet pour point critique :

   ☐ $\left(-\dfrac{3}{8}, -\dfrac{3}{8}\right)$ ☐ $\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ ☐ $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ ☐ $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

6. Une primitive de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$ est la fonction :

   ☐ $x \mapsto (\ln(x))^2$ ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ ☐ $x \mapsto x\ln(x) - x$

7. L'intégrale $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}}\, \mathrm{d}x$ est égale à :

   ☐ $\sqrt{6} - 4$ ☐ $-\sqrt{6} + 4$ ☐ $-2\sqrt{3} + 4$ ☐ $2\sqrt{3} - 4$

8. La suite géométrique (u_n) de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$ a pour expression :

   ☐ $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ☐ $u_n = 2^{n-1}$ ☐ $u_n = 2 + \dfrac{n}{2}$ ☐ $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$

9. La somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$, où (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 1$, est égale à :

   ☐ $1 - n^2$ ☐ $n^2 - n$ ☐ $n - n^2$ ☐ $n^2 - 1$

10. La suite géométrique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$ a pour limite :

   ☐ $-\infty$ ☐ -2 ☐ 0 ☐ $+\infty$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit q la quantité d'un produit donné dans une économie fermée. On considère les fonctions d'Offre et de Demande suivantes, en fonction de la quantité q : $O(q) = 15 + 5q - q^2$ et $D(q) = 2q + 5$.

1. Déterminer la quantité d'équilibre q_0 puis en déduire le prix d'équilibre p_0.
2. A l'équilibre, le consommateur obtient la quantité q_0 au prix p_0 alors qu'il était prêt à payer davantage.
   La valeur moyenne p^* des prix supérieurs à p_0 qu'il était prêt à payer est $p^* = \dfrac{1}{q_0}\displaystyle\int_0^{q_0} D(q)\ \mathrm{d}q$.
   Calculer p^*.
3. On appelle surplus du consommateur la quantité définie par $S_C = \displaystyle\int_0^{q_0} D(q)\ \mathrm{d}q - p_0q_0$.
   Calculer S_C.
4. On appelle surplus du producteur la quantité définie par $S_P = p_0q_0 - \displaystyle\int_0^{q_0} O(q)\ \mathrm{d}q$.
   Calculer S_P.

Exercice 4

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

1. Les taux d'intérêts sont composés quand ils s'ajoutent à la fin de chaque période pour produire à leur tour des intérêts à la fin de la période suivante.
   On note c_0 le capital initial, c_n le capital au bout de n périodes et i le taux d'intérêt par période.
   (a) Exprimer c_n en fonction de c_0, i et n.
   (b) On place 10000€ pendant 5 ans à 0,75%.
   Quel est le capital obtenu au bout des 5 ans ?
   (c) Pendant combien d'années doit-on placer 5000€ à 2% pour disposer de 6000€ ?
   (d) Avec un taux d'intérêt à 3%, déterminer le nombre d'années nécessaires pour doubler son capital de départ.

2. Monsieur Guillaume vient de contracter un emprunt pour son projet immobilier. Le montant de ce projet s'élève à 180000€. Il a un apport de 30000€ et sa banque lui a proposé un financement au taux annuel fixe de 1%. Il rembourse 500€ par mois.
On note u_n le capital restant dû à la fin de la n-ième année d'amortissement.

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,01u_n - 6000$.

   (b) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n - 600000$ est géométrique.

   (c) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

   (d) Quelle est le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser l'emprunt ?

   (e) Déduire de la question précédente la somme que Monsieur Guillaume a finalement versé à la banque à l'issue de cet emprunt.

   (f) En déduire le coût des intérêts.

Données numériques : $(1,0075)^5 \simeq 1,038$, $\dfrac{\ln(6/5)}{\ln(1,02)} \simeq 9,2$, $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \simeq 23,4$, $\dfrac{\ln(4/3)}{\ln(1.01)} \simeq 28,9$.