DS 1

Devoir surveillé du 03/09/20

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_0.
2. (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Que peut-on en déduire sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. (a) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

   (c) En déduire un encadrement de I_n.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 2

1. On considère dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
   (a) La famille (u,v) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
   (b) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F = Vect(u,v)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? La famille (u,v) est-elle une base de F ?
   (c) Le vecteur $x = \begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix}$ appartient-il à F ? Si c'est le cas, quelle sont ces coordonnées dans la base (u,v) ?
   (d) Le vecteur $y = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ appartient-il à F? Si c'est le cas, quelle sont ces coordonnées dans la base (u,v) ?

2. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$.

   (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer une famille génératrice de G composée de deux vecteurs s et t.

   (c) Montrer que (s, t) est une base de G et en déduire la dimension de G.

3. Dans cette question, on cherche à déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

   (a) Donner une condition sur x_1, x_2, x_3 pour que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ appartienne à F.

   (b) En déduire une famille génératrice, puis une base et la dimension de $F \cap G$.

Exercice 3

Un ordinateur envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs: le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. En d'autres termes, la probabilité pour que le serveur A (resp. B) soit choisi est de $\frac{7}{10}$ (resp. $\frac{3}{10}$). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $\frac{1}{10}$, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de $\frac{1}{20}$.

   (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $P(L_1 = k) = \frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^k + \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^k$.

   (b) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$.

   (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   (d) Calculer la probabilité $P(L_1 = i \cap L_2 = j)$ pour $i, j \geq 1$.

   (e) En déduire la loi de L_2.

3. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note: T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi par l'ordinateur et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

(a) Déterminer la loi de T_1.

(b) Calculer l'espérance et la variance de T_1.

(c) Déterminer $T_2(\Omega)$.

(d) Montrer que, pour tout $k \geq 2$

$$P(T_2 = k) = (k-1)\left(\frac{7}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^{k-2}$$

Exercice 4

On considère 3 boîtes contenant chacune 4 jetons :

- La boîte 1 contient 3 jetons portant le numéro 1 et 1 jeton portant le numéro 3.
- La boîte 2 contient 2 jetons portant le numéro 1 et 2 jetons portant le numéro 3.
- La boîte 3 contient 2 jetons portant le numéro 2 et 2 jetons portant le numéro 3.

On effectue alors une suite de tirages selon les règles suivantes :

- Le premier tirage a lieu dans la boîte 1.
- Après chaque tirage dans une boîte, le jeton tiré est remis dans la même boîte.
- Pour tout entier naturel non nul n, le $(n+1)$-ième tirage a lieu dans la boîte du numéro du jeton tiré lors du n-ième tirage.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de la boîte où on effectue le n-ième tirage. On a par exemple que $X_1 = 1$. On note $E(X_n)$ l'espérance de X_n.

On pose enfin $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

1. Loi de X_n :

   Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Déterminer les probabilités $P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$. Justifier.

   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.

   (c) Exprimer de même $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$ en fonction de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.

   (d) Expliciter une matrice M telle que $U_{n+1} = MU_n$. Préciser la valeur de U_1.

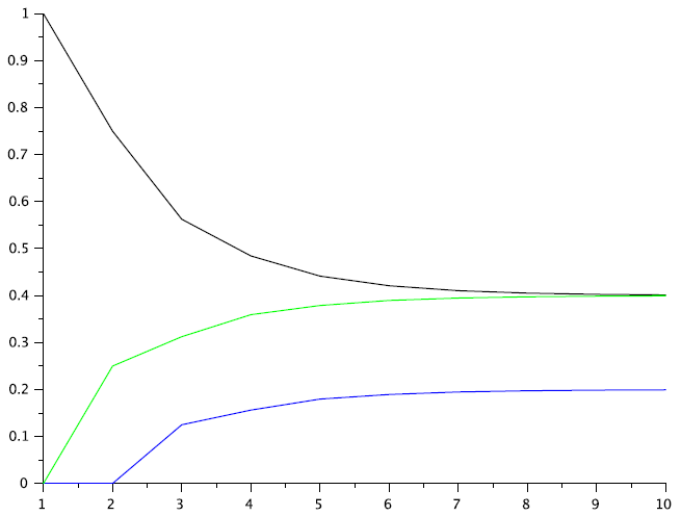
   (e) Compléter la fonction `loideX` suivante pour que, étant donné un entier naturel n non nul, elle permette d'obtenir la matrice colonne U_n :

```
function U=loideX(n)
    U=***
    M=***
    for k=2:n do
        U=***
    end
endfunction
```

(f) On considère les instructions suivantes :

```
A=zeros(3,10)
for k=1:10 do
    A(:,k)=loideX(k)
end
plot2d(1:10,[A(1,:)',A(2,:)',A(3,:)'])
```

On exécute ces instructions depuis l'éditeur et on obtient le résultat suivant :



Que représente la variable `A` ? Comment interpréter le résultat graphique obtenu ?

2. Espérance de X_n :

(a) Compléter la fonction `esperancedeX` suivante pour que, étant donné un entier naturel n non nul, elle permette d'obtenir l'espérance de X_n :

```
function E=esperancedeX(n)
    U=loideX(n)
    E=***
endfunction
```

(b) On considère les matrices lignes L et J définies par $L = (1\ 2\ 3)$ et $J = (1\ 1\ 1)$.
Déterminer deux réels α et β tels que $(*) : LM = \alpha L + \beta J$.

(c) Calculer LU_n en fonction de $E(X_n)$ puis calculer JU_n.

(d) En multipliant l'égalité $(*)$ par U_n à droite, en déduire que : $E(X_{n+1}) = \alpha E(X_n) + \beta$.

(e) En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

3. Simulation de X_n :

(a) Compléter la fonction `simulX` suivante pour que, étant donné un entier naturel n non nul, elle permette de simuler l'expérience aléatoire et d'obtenir la valeur de X_n :

```
function res=simulX(n)
    M=***
    X=grand(***,***,***,***)
    res=***
endfunction
```

(b) On considère les instructions suivantes :

```
p=zeros(1,10000)
for k=1:10000 do
    p(k)=simulX(10)
end
T=tabul(p,'i')
disp(T)
```

On les exécute depuis l'éditeur et on obtient le résultat suivant dans la console :

```
-->exec('/Enseignement-ECE/ECE1/DS/exo.sce', -1)
    1.    4012.
    2.    1979.
    3.    4009.
```

Que représente la variable `p` ? Et `T` ? Interpréter les résultats obtenus dans la console.

(c) Que fait l'instruction `mean(p)` ? Lorsqu'on l'exécute dans la console, on obtient le résultat suivant :

```
-->mean(p)
 ans  =
    1.9997
```

Interpréter ce résultat.