DS 1

# Devoir surveillé du Samedi 16 Septembre

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

## Exercice 1

Pour $x \in ]0,+\infty[$, on pose : $f(x) = \dfrac{\exp(-x)}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

   (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. *Informatique.*

   (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier $n$ tel que $u_n > a$.

```python
def fonc_1(a):
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while ..... :
    u = exp(-u)/u
    n = .....
  return n
```

   (b) On considère maintenant la fonction Python :

```python
def fonc_2(a):
  from numpy import exp
  u = 1
  n = 0
  while u>a :
    u = exp(-u)/u
    n = n+1
  return n
```

   Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire pour $u_5$ et $u_6$ ?
   Commenter ce résultat en une ligne.

   (c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier $n$ et qui renvoie la valeur de $u_n$.

3. Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose : $g(x) = \exp(-x) - x^2$.

   (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$.

   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x$, possède une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$, que l'on notera $\alpha$.

   (c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $\mathrm{e} \approx 2,7$.

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

   (b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in ]0,+\infty[$, on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

   (a) Soit $x$ un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

   (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue $x$, admet exactement deux solutions sur $[0,+\infty[$ qui sont $0$ et $\alpha$, $\alpha$ étant le réel introduit à la question 3.(b).

   (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

---

## Exercice 2

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $f_n$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variation.

   (b) En déduire, lorsque $n$ est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$ et $v_n$ solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

   (a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.

   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que $(u_n)$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. En déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

3. Étude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que : $\forall n \geq 3$, $n\ln(n) < v_n$.

   (c) Soit $g$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Étudier $g$ et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2\ln(n)$.

   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $\forall n \geq 3$, $v_n < 2n\ln(n)$.

   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.

---

## Exercice 3

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier, sans calcul, que $A$ est diagonalisable.

2. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont des vecteurs propres de $A$ et expliciter les valeurs propres associées.

   (b) En déduire une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Calculer $P^{-1}$.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $A^n$ par ses éléments.

4. Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.
   On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.

   (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

   (c) Déterminer les limites respectives $u,\ v,\ w$ de $u_n,\ v_n,\ w_n$ lorsque le nombre entier $n$ tend vers l'infini.

5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$.

   (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $d_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$
   (b) Déterminer un entier naturel $n$ tel que : $d_n \leq 10^{-2}$.

---

## Exercice 4

On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

### Partie I : Réduction de $A$.

1. Est-ce que $A$ est inversible ?

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A$.

3. Déterminer une matrice carrée $P$ d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = P\ D\ P^{-1}$ et calculer $P^{-1}$.

### Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$.

On se propose de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M$ matrice carrée d'ordre trois.
Soit $M$ une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$ (où la matrice $P$ a été définie à la question 3).

4. Montrer l'équivalence : $M^2 = A \Longleftrightarrow N^2 = D$.

5. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.
6. En déduire que, si $N^2 = D$, alors $N$ est diagonale.
7. Déterminer toutes les matrices diagonales $N$ telles que $N^2 = D$.
8. En déduire la solution $B$ de l'équation $M^2 = A$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

**Partie III : Intervention d'un polynôme.**

9. Montrer qu'il existe un polynôme $Q$ de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

10. En déduire que : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$ (où la matrice $B$ a été définie à la question 8).
11. Montrer que, pour toute matrice carrée $F$ d'ordre trois, on a l'équivalence :

$$A\ F = F\ A \Longleftrightarrow B\ F = F\ B.$$