L1-MA0202 Algèbre linéaire
Groupes A1-A2-A3-A4-A5

UFR SEN Reims
2016-2017

Devoir surveillé du lundi 27 mars 2017

Durée: 90 minutes
Tous les documents, calculatrices, téléphones portables ne sont pas autorisés.
Toutes les réponses doivent être précisément justifiées.
La clarté des réponses sera prise en compte dans l'attribution de la note.

Questions de cours.

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E. Que signifie $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E ? Que signifie $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E ?

Exercice 1

1. La famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivante est-elle libre ?

$$\{(1,2,1),(2,1,1),(1,0,-1)\}.$$

2. Soit (u, v, w) une famille libre d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 3.
   La famille $(u-v, u+2w, u-3v-4w)$ est-elle libre ?

3. On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et la multiplication par un réel habituelles.

   (a) Quel est l'élément neutre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$?

   (b) On pose f, g, h appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, les trois fonctions définies par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \sin(2x), \quad h(x) = \sin(3x).$$

   La famille (f, g, h) est-elle libre ?
   Indication: on pourra considérer les trois valeurs de x: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ et on rappelle que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les trois vecteurs

$$u = (1,0,0,1), \qquad v = (0,1,1,0), \qquad w = (1,1,2,1).$$

Soit $x = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur t_1, t_2, t_3 et t_4 pour que x soit combinaison linéaire de u, v et w.

Exercice 3

On pose

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}, \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z = 0\right\}.$$

1. (a) Ecrire F comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par une famille de vecteurs que l'on précisera en utilisant la notation *Vect*.

   (b) Même question pour l'ensemble G et pour l'ensemble $F \cap G$.

2. En déduire une base $\mathcal{B}_F$ et la dimension du sous-espace vectoriel F. Même question pour les ensembles G et $F \cap G$.

3. Peut-on ajouter des vecteurs à la base $\mathcal{B}_F$ de F, pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier.