DS 11 (A)

Devoir surveillé du Samedi 16 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z,\ 2y,\ -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1. (a) Calculer v.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
   Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

2. (a) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (b) Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.
   (c) Déterminer les valeurs propres de A', ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
   (d) La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?

3. (a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer : $B^2 = 2B$.
   (c) En déduire les valeurs propres de B, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
   (d) La matrice B est-elle diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$. Montrer que M n'est pas inversible.
   (On pourra raisonner par l'absurde).

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.
   (a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que les matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.
   (c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
   Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.
   (d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(1) < 0$.

4. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1,+\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Écrire un programme en langage `Python` qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

7. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$

9. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1,+\infty[$,

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2-1).$$

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2 ,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$

11. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage" et R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage".

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```python
def EML(n):
    b = 1 #nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 #nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 #nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k in range(n):
        x = rd.random()
        if ..... :
            .....
        else:
            .....
    return(s)
```

2. On exécute le programme suivant :

```python
n = 10
m = 0
for i in range(1000):
    m = m+EML(n)
print(m/1000)
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

   (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

7. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer $P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right)$.
   (b) Justifier que : $P\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k} P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right)$.
   En déduire que : $P\left(S_n = k\right) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Montrer que : $\forall k \in [\![0; n]\!], \quad P_{(S_n=k)}\left(X_{n+1} = 1\right) = \dfrac{k+2}{n+3}$.
    (b) En déduire que : $P\left(X_{n+1} = 1\right) = \dfrac{E(S_n) + 2}{n+3}$.
    (c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x < 0, \quad P\left(T_n \leq x\right) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad P\left(T_n \leq x\right) = 1.$$

12. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(T_n \leq x\right) = \frac{\left(\lfloor nx \rfloor + 1\right)\left(\lfloor nx \rfloor + 2\right)}{(n+1)(n+2)}$$

    où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.
