DS 11 (B)

Devoir surveillé du Samedi 22 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe
$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.
   (b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   (c) En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.
3. Simulation
   (a) On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (b) Utiliser la question 3a) pour écrire une fonction Python d'en-tête `def simulx()` qui renvoie une simulation de X.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.
   (a) Montrer que l'on a :
$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :
$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0.$$
5. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Exprimer, pour tout réel x, $P(M_n > x)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable Y_n présentée à la question 4.
   (b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```
def simulM(n):
    X = np.array([ ..... for k in range(n)])
    M = .....
    return M
```

Exercice 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer la dimension de $Im(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $Im(f)$.
   (b) En déduire la dimension de $Ker(f)$ puis donner une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $Ker(f)$.
2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
   (a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
   (b) On note $e'_4 = u - v$ et $e'_5 = u + 3v$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5)$.
   Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^5$ puis donner la matrice de f dans cette base.
   (c) En déduire que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.
3. (a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.
   (b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.
4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n , b_n et c_n tels que :
   $$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$
   (a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n , b_n et c_n en fonction de n.
   (b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.
5. (a) Donner les commandes `Python` pour importer les bibliothèques `numpy` avec le raccourci `np` et `numpy.linalg` avec le raccourci `al`.
   (b) Donner les commandes `Python` pour définir la matrice C.
   (c) On entre dans la console `Python` les instructions suivantes :

```
>>> Sp, VP = al.eig(A)
>>> Sp
  [ 3.00000000e+00  -1.00000000e+00  -1.64638394e-17  0.00000000e+00
    0.00000000e+00 ]
>>> VP
  [[ -6.54653671e-01  -4.47213595e-01  -6.79869978e-17  -6.08591650e-17
     -2.38133580e-17]
   [ -2.18217890e-01   4.47213595e-01  -2.88675135e-01  -3.49583154e-01
      3.49583154e-01]
   [ -2.18217890e-01   4.47213595e-01  -2.88675135e-01  -3.33451939e-01
      3.33451939e-01]
   [ -2.18217890e-01   4.47213595e-01  -2.88675135e-01  -1.74880049e-01
      1.74880049e-01]
   [ -6.54653671e-01  -4.47213595e-01   8.66025404e-01   8.57915142e-01
     -8.57915142e-01]]
```

   Expliquer en quoi ces résultats sont conformes à ceux obtenus à la question 2.(c).

Exercice 3

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) \mathrm{d}t \tag{*}$$

1. Montrer que l'égalité (*) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) \mathrm{d}u \tag{**}$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x f(u) \mathrm{d}u$$

   (b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x)$$

   (c) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

   (d) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2d) est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$$

   Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Exercice 4

Partie 1 : Préliminaires

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

   (a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que :

   $$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M |x-y|$$

   (b) En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

   (c) Montrer alors que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

(d) En sommant la relation précédente, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

(e) Conclure finalement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx.$$

(a) Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

(b) En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

(c) Déterminer$I(p+q,0)$ et montrer finalement que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

(d) Compléter la fonction suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:

```
def calcul (p,q) :
  I = .....
  for k in range(0, q) :
    I = .....
  return .....
```

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \dfrac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \dfrac{k}{n}\right)$.

3. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.
Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$.

4. Donner la loi de X_1.

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

5. (a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\dfrac{m(n-1)}{2n}$.

(c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\dfrac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

(d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\dfrac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2}$.

6. (a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout i de $X_n(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i).$$

(b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

(c) Vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X).$$