DS 12 (A)

Devoir surveillé du Samedi 30 Mars

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
6. Soit $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.

   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   On pourra admettre pour la suite que $v = (1, 1, -3)$ et $u = (-6, -6, 0)$.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

9. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   où a, b et c sont trois réels.

   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de φ et dresser son tableau de variations.

   On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{(1/2a)}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$:

   $$(x, y) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.
9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :
$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$
10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1)?

    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2)?

    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :
$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$
Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)\, a^{n-1}}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$
   (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (b) Donner la fonction de répartition de X.

   (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

   (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3\,a^2}{4}$.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

(c) Écrire une fonction en langage `Python` d'en-tête : `def simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.

À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rd.random([m, n])` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

4. (a) Calculer $P(X > 2a)$.

(b) Calculer $P_{(X>2a)}(X > 6a)$.

(c) On suppose que la fonction `Python` de la question 3.(a) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(1, N+1):
    if ..... :
        s1 = s1+1
        if X(k) > 6*a:
            .....
if s1>0:
    print( ..... )
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose : $V_n = \dfrac{2}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Montrer que $E(V_n) = a$.

(b) Vérifier que $V(V_n) = \dfrac{a^2}{3n}$.

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

(c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $E(\lambda_n W_n) = a$.

(d) Calculer la variance de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n\,(3n-2)}$.

7. (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```python
def simulV(a,m,n):
    X = simulX(a, m, n)
    V = np.zeros(m)
    for k in range(m):
        V[k] = .....
    return(V)
```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

(b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```python
W = simulW( ..... , ..... , ..... )
V = simulV( ..... , ..... , ..... )
n = np.arange(1, 21, 1)
plt.plot(n, ..... , "+") #tracé avec des +
plt.plot(n, ..... , "x") #tracé avec des x
```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.